УДК 519.863, 519.868

Васильев С.А., Харун Хасан Салех

Российский университет дружбы народов, г. Москва, Россия

АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ УСЛУГ В УСЛОВИЯХ ОГРАНИЧЕННОЙ КОНКУРЕНЦИИ*

Аннотация

Как показал опыт, экономические структуры, порождаемые рынком телекоммуникаций, требуют особых подходов к анализу взаимоотношений между субъектами этого рынка. Рынок телекоммуникаций при условии ограниченной (несовершенной) конкуренции, предпосылками которой являются, когда значительная доля рынка у двух или трех компаний, а также имеются барьеры для проникновения в телекоммуникационную отрасль новых конкурентов, характеризуется отклонением от рыночного равновесия, а присутствие на рынке ограниченного числа крупных компаний, как показывает опыт, приводит картельному сговору, наличие которого очень трудно доказать, что позволяет такому картелю поддерживать завышенные цены на услуги, не рискуя потерять клиентов. Целью данной работы является построение модели динамического ценообразования на рынке телекоммуникаций при условии ограниченной конкуренции. Для достижения цели был применен комплексный подход, заключающийся в использовании методов экономико-математического моделирования и теории массового обслуживания. С учетом несовершенной конкуренции на рынке телекоммуникаций и при условии максимизации прибыли каждой компанией в рамках построенной модели были найдены равновесные тарифы, а также объем предоставляемых услуг. Помимо этого, была определена оптимальная стратегия государства по созданию конкурентной среды в телекоммуникационной отрасли и проанализирована динамика перехода к рынку совершенной конкуренции.

Ключевые слова

Аналитические методы в теории массового обслуживания; динамическая оптимизация; экономико-математическое моделирование; ценообразование; финансовая математика.

Vasilyev S.A., Haroun Hassan Salih

Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia

ANALYSIS OF DYNAMIC PRICING METHODS FOR TELECOMMUNICATION SERVICES IN CONDITIONS OF LIMITED COMPETITION

Abstract

It is shown that economic structures that are present on the telecommunications market require special approaches for analysis of the market relationship between them. The telecommunication market is subject to a limited (imperfect) competition. The prerequisites are that a significant share of the market is occupied by two or three companies, and there are barriers to entry in the telecommunications industry for new competitors, characterized by the deviation from the market equilibrium. As experience shows, limited number of large companies leads to a cartel collusion which is very difficult to prove that allows this cartel to maintain high prices for services without losing customers. The aim of this work is to build a model of dynamic pricing in the telecommunications market with limited competition. To achieve the goal, a comprehensive approach consisted of methods of economic-mathematical modeling and queuing theory was used. Taking into account limited competition in the telecommunications market and maximizing the profit of each company in the framework of the constructed model, equilibrium tariffs were found, as well as the volume of provided services. In addition, the optimal state strategy for creating a competitive environment in the

* **Труды II Международной научной конференции «Конвергентные когнитивно-информационные технологии» (Convergent’2017), Москва, 24-26 ноября, 2017**

Proceedings of the II International scientific conference "Convergent cognitive information technologies" (Convergent’2017), Moscow, Russia, November 24-26, 2017

CEUR-WS.org/Vol-2064/paper02.pdf

telecommunications industry was determined, and the dynamics of the transition to the market of perfect competition was analyzed.

Keywords

Analytical methods in queueing theory; dynamic optimization; mathematical modeling; pricing; financial mathematics.

Введение

Проникновение телекоммуникационных услуг во все сферы жизни современного общества обусловило возникновение рынка телекоммуникаций. Как показал опыт, экономические структуры, порождаемые рынком телекоммуникаций, требуют особых подходов и методов для построения моделей телекоммуникационных услуг [1-14].

На практике проблема ценообразования на услуги телекоммуникационных компаний зависит от многих параметров модели, которые не заданы на стадии планирования.

Целью данной работы является построение модели динамического ценообразования на рынка телекоммуникаций при условии ограниченной конкуренции.

Для достижения цели был применен комплексный подход, заключающийся в использовании методов экономико-математического моделирования и теории массового обслуживания. На основе построенной динической экономико-математической модели ценообразования на рынке телекоммуникаций при условии ограниченной конкуренции предложен метод решения задачи формирования оптимальной ценовой политики телекоммуникационными компаниями с учетом обеспечения качества предоставляемых услуг.

Предложенная экономико-математическая модель ценообразования на рынке телекоммуникаций при условии ограниченной конкуренции позволит провести анализ конкурентной среды в различных сегментах телекоммуникационного рынка, определить стратегические направления его развития, особенности инновационной политики в процессе внедрения телекоммуникационных услуг нового поколения 5G, а также, в случае необходимости, выработать подходы к государственному регулированию телекоммуникационного рынка с целью поддержания конкуреной среды на рынке связи.

Построение модели рынка телекоммуникационных услуг в случае ограниченной конкуренции

Введем в рассмотрение сеть N, состоящую из n эквивалентных моносервисных сетей связи произвольной топологии$N=\{N_1,\ldots,N_n\}$, принадлежащих n различным компаниям и состоящих из некоторого числа узлов, соединенных звеньями. При этом предполагается, что между всеми этими сетями $N=\{N_1,\ldots,N_n\}$ имеются узлы коммутации.

Пусть J_r, $r=1,\ldots, n$–количество узлов каждой из сетей, а $J_r=\{1,2,\ldots,J_r\}$ – множество всех узлов r-компании, занумерованных произвольным образом, пусть также L_r , $r=1,\ldots, n$–количество звеньев каждой из сетей, а $L_r=\{1,2,\ldots,L_r\}$ – множество всех звеньев r-компании, занумерованных произвольным образом.

Обозначим C_{rl} емкость l-звена r-компании. За единицу емкости звена примем величину одной передаточной единицы (bandwidthunit). Таким образом, C_{rl} представляет собой пропускную способность соответствующего канала связи r-компании.

Для передачи информационных потоков между узлами сети N могут быть установлены двухточечные соединения. Каждое такое соединение характеризуется маршрутом, т.е. множеством звеньев сети N, через которые устанавливаются соединения.

Пусть на рынке в момент t присутствует W_t ($t=1,2,\ldots,T_{max}$) потенциальных потребителей (абонентов) услуги, предоставляемой моносервисной сетью. Будем считать, что для каждого потребителя возможно ввести индивидуальную функцию полезности $U_w(Q_t(p_t), p_t),\ w=\overline{1,W_t}$, которая удовлетворяет следующим требованиям:

$$\frac{\partial U_w(Q_t(p_t), p_t)}{\partial Q_t} \ge 0, \quad \frac{\partial^2 U_w(Q_t(p_t), p_t)}{\partial Q_t^2} < 0, \tag{1}$$

где $Q_t(p_t)$ – число единиц услуги, которая была оказана абоненту в момент времени t, p_t – цена за единицу услуги в момент времени t.

Первое неравенство свидетельствует о том, что каждая дополнительная единица услуги увеличивает полезность. Второе неравенство отражает принцип убывающей предельной полезности.

Также будем считать, что потребители являются рациональными, каждый из них решает следующую задачу максимизации своей полезности:

$$\frac{\partial U_w(Q_t(p_t), p_t)}{\partial Q_t} = 0, \quad \frac{\partial^2 U_w(Q_t(p_t), p_t)}{\partial Q_t^2} < 0, \tag{2}$$

Решение этой задачи дает индивидуальную функцию спроса $Q_{tw}(p_t)=D_{tw}(p_t)$ для рассматриваемой услуги.

Очевидно, что $\dfrac{dD_{tw}(p)}{dp_t} < 0$, так как спрос на услугу должен падать с ростом цены.

Пусть индивидуальная функция полезности имеет следующий вид:

$$U_w(Q_t(p_t), p_t) = [r_{wt} - s_{wt}\ Q_t(p_t)]\ Q_t(p_t) - p_t\ Q_t(p_t), \tag{3}$$

где коэффициенты $r_{wt}>0$, $s_{wt}>0$ – положительные параметры. Решив задачу (2) с функцией (3) можно получить индивидуальную функцию спроса:

$$D_{wt}(p_t) = \frac{r_{wt} - p_t}{2s_{wt}} = a_{wt} - b_{wt}\, p_t\,,\ a_{wt} = \frac{r_{wt}}{2s_{wt}},\, b_{wt} = \frac{1}{2s_{wt}}, \tag{4}$$

которая является линейной функцией от цены.

Будем предполагать, что индивидуальный спрос на услугу не является постоянной величиной, а изменяется на интервале времени $t \in \left[t_0, t_0 + T\right) (T \ll T_{\max})$, тогда для интервала $\left[(\gamma-1)T, \gamma T\right)$, γ=1,2,..., Γ, индивидуальная функция спроса будет иметь вид:

$$Q_{\gamma wt}(p_t) = D_{\gamma wt}(p_t) = a_{\gamma wt} - b_{\gamma wt}\, p_t. \tag{5}$$

Далее функцию спроса на интервале γ будем называть γ-интервальной функцией спроса абонента. Абонент при пользовании услугой на интервале времени $t \in \left[(\gamma-1)T, \gamma T\right)$, γ=1,2,..., Γ создает нагрузку, среднее значение интенсивности которой, согласно (1.21) и (1.22):

$$Y_{\gamma wt} = EX_{\gamma wt} = \bar{\lambda}_{\gamma wt}\ h_{\gamma wt} \approx \frac{1}{T}\int_{(\gamma-1)T}^{\gamma T} n_{wt}(t)\,dt, \quad \gamma = \overline{1,\Gamma}, \tag{6}$$

где $\bar{\lambda}_{\gamma wt}$, $\gamma = \overline{1,\Gamma}$, $w = \overline{1,W_t}$ – средняя интенсивность входящего потока заявок от абонента w на интервале времени $\left[(\gamma-1)T, \gamma T\right)$; $h_{\gamma wt}$, $\gamma = \overline{1,\Gamma}$, $w = \overline{1,W_t}$ – средняя длительность обслуживания на интервале времени $\left[(\gamma-1)T, \gamma T\right)$; $Y_{\gamma wt}$, $\gamma = \overline{1,\Gamma}$, $w = \overline{1,W_t}$ – средняя интенсивность нагрузки на интервале времени $\left[(\gamma-1)T, \gamma T\right)$, создаваемая абонентом *w.*

В рамках рассматриваемой модели будем считать, что средняя интенсивность нагрузки на интервале времени $t \in \left[(\gamma-1)T, \gamma T\right)$, создаваемая абонентом *w,* линейно зависит от соответствующей функции спроса этого же абонента на том же интервале времени:

$$Y_{\gamma wt} = \bar{\lambda}_{\gamma wt}\ h_{\gamma wt} = \theta D_{\gamma wt}(p_t) = \theta\left(a_{\gamma wt} - b_{\gamma wt}\, p_t\right),\ \gamma = \overline{1,\Gamma},\ w = \overline{1,W_t}, \tag{7}$$

где $\theta = 1/T > 0$ – коэффициент пропорциональности.

Общая интенсивность нагрузки, создаваемая абонентами на интервале времени $t \in \left[(\gamma-1)T, \gamma T\right)$, представляет собой сумму средних интенсивностей нагрузки каждого абонента

$$Y_{\gamma t} = \sum_{w=1}^{W_t} Y_{\gamma wt}, \quad \gamma = \overline{1,\Gamma}, \tag{8}$$

а общий спрос на услугу на рассматриваемом интервале представляет собой сумму спросов абонентов:

$$Q_{\gamma t}(p_t) = \sum_{w=1}^{W_t} D_{\gamma wt}(p_t) = \sum_{w=1}^{W_t}\left(a_{\gamma wt} - b_{\gamma wt}\, p_t\right), \quad \gamma = \overline{1,\Gamma}. \tag{9}$$

Представим выражение (9) в более удобном виде:

$$Q_{\gamma t}(p_t) = D_{\gamma t}(p_t) = \left(a_{\gamma t} - b_{\gamma t}\, p_t\right), \quad \gamma = \overline{1,\Gamma}, \tag{10}$$

$$D_{\gamma t}(p_t) = \sum_{w=1}^{W_t} D_{\gamma wt}(p_t),\ a_{\gamma t} = \sum_{w=1}^{W_t} a_{\gamma wt},\ b_{\gamma t} = \sum_{w=1}^{W_t} b_{\gamma wt}, \quad \gamma = \overline{1,\Gamma}, \tag{11}$$

где параметры $a_{\gamma t}>0$ и $b_{\gamma t}>0$ определяются из маркетинговых исследований рынка услуги в момент времени *t.*

Из (7)-(11) можно получить связь между общей интенсивностью нагрузки и общим спросом на услугу на интервале $\left[(\gamma-1)T, \gamma T\right)$:

$$Y_{\gamma t}(p_t) = \theta Q_{\gamma t}(p_t) = \theta D_{\gamma t}(p_t) = \theta\left(a_{\gamma t} - b_{\gamma t}\, p_t\right) = \alpha_{\gamma t} - \beta_{\gamma t}\, p_t, \quad \gamma = \overline{1,\Gamma}, \tag{12}$$

т.е. интенсивность нагрузки является линейной функцией цены, где коэффициенты $\alpha_{\gamma t} = \theta\ a_{\gamma t}$, $\beta_{\gamma t} = \theta b_{\gamma t}$, $\alpha_{\gamma t}>0$, $\beta_{\gamma t}>0$.

Суммируя $Q_{\gamma t}(p_t)$ и $Y_{\gamma t}(p_t)$ по всем интервалам времени $\left[(\gamma-1)T, \gamma T\right)$ получим общий спрос $Q_t(p_t)$ на рассматриваемую услугу и общую интенсивность нагрузки $Y_t(p_t)$ за время $[0, \Gamma T)$:

$$\sum_{\gamma=1}^{\Gamma} Q_{\gamma t}(p_t) = \sum_{\gamma=1}^{\Gamma}(a_{\gamma t} - b_{\gamma t} p_t) = Q_t(p_t) = a_t - b_t p_t, \tag{13}$$

$$\sum_{\gamma=1}^{\Gamma} Y_{\gamma t}(p_t) = \sum_{\gamma=1}^{\Gamma}(\alpha_{\gamma t} - \beta_{\gamma t} p_t) = Y_t(p_t) = \alpha_t - \beta_t p_t, \tag{14}$$

$$Y_t(p_t) = \alpha_t - \beta_t p_t = \theta Q_t(p_t) = \theta\left(a_t - b_t p_t\right). \tag{15}$$

Пустьm_{it}– доля потребителей, выбравших для своего обслуживания компанию $i \in \{1,\dots,n_t\}$, где n_t – число компаний на рынке в момент *t*, тогда $W_{it}=m_{it}W_t$– количество абонентов компании $i \in \{1,\dots,n_t\}$ в этот момент. Очевидно, что имеет место соотношение $\sum_{i=1}^{n_t} m_i = 1$.

Общий спрос на услугу компании $i \in \{1,\dots,n_t\}$ в момент *t*(*t=1,2,...,T_{max}*) можно представить в виде:

$$Q_{it}(p_{it}) = m_{it} Q_t(p_{it}) = m_{it}(a_t - b_t p_{it}), \tag{16}$$

где p_{it}– цена услуги компании $i \in \{1,\dots,n_t\}$ в момент *t* (*t=1,2,...,T_{max}*).

Рыночный спрос абонентов сети N_i компании $i \in \{1,\dots,n_t\}$ на услугу в пределах этой сети имеет вид:

$$Q_{iit}(p_{it}) = m_{it}^2 Q_t(p_{it}) = m_{it}^2(a_t - b_t p_{it}), \tag{17}$$

Рыночный спрос абонентов сети N_i компании $i \in \{1,\dots,n_t\}$ на услугу, предоставляемую одновременно как сетью N_i, так и сетью N_j $i,\ j \in \{1,\dots,n_t\}$ $(i \neq j)$ компании *j* можно представить так:

$$Q_{ijt}(p_i) = m_{it} m_{jt} Q_{it}(p_{it}) = m_{it} m_{jt}(a_t - b_t p_{it}). \tag{18}$$

При этом для (16) из (17)-(18) получим для компании *i*:

$$Q_{it}(p_{it}) = Q_{iit}(p_{it}) + \sum_{i \neq j}^{n_t} Q_{ijt}(p_{it}), \quad i, j \in \{1,\dots,n_t\}. \tag{19}$$

В силу (15)-(19) имеют место следующие соотношения:

$$Y_{ijt}(p_{it}) = m_{it} m_{jt}(\alpha_t - \beta_t p_{it}) = \theta m_{it} m_{jt} Q_t(p_{it}) = \theta m_{it} m_{jt}\left(a_t - b_t p_{it}\right), \tag{20}$$

$$Y_{it} = Y_{iit}(p_{it}) + Y_{ijt}(p_{it}) + Y_{jit}(p_{jt}), \ i, j \in \{1,\dots,n_t\}, \tag{21}$$

где $Y_{ijt}(p_{it}),\ i, j \in \{1,\dots,n_t\}$ – нагрузки, которые соответствуют спросам $Q_{ijt}(p_{it}),\ i, j \in \{1,\dots,n_t\}$, а Y_{it}– общая нагрузка на сеть компании $i \in \{1,\dots,n_t\}$.

Функцию прибыли компании $i \in \{1,\dots,n_t\}$ в момент *t* (*t=1,2,...,T_{max}*) представим в виде разности функции выручки TR_{it} и постоянных издержек F_{it}, которые не зависят от каких-либо параметров и включают в себя расходы на эксплуатацию сети N_i, оплату труда сотрудникам компании, расходы на рекламу и т.д.

$$\Pi_{it} = TR_{it} - F_{it}, \tag{22}$$

$$TR_{it} = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \left[p_{it} Q_{iit}(p_{it}) + (p_{it} - \delta_{ij} p_{jt}) Q_{ijt}(p_{it}) + \delta_{ij} p_{it} Q_{jit}(p_j) \right],$$

где $\delta_{ij} \in [0,1]$ – параметр, подлежащий определению в процессе переговоров между компаниями *i* и *j*. Таким образом, мы предполагаем, что стоимость услуги доступа в сеть конкурента является величиной, пропорциональной стоимости обслуживания этой компанией своих абонентов.

Построение динамической модели ценообразования на рынке телекоммуникационных услуг в случае ограниченной конкуренции

Для анализа динамики рынка введем в рассмотрение многошаговую антагонистическую игру с *полной информацией*. Игра происходит в течение *T* шагов с номерами *t = 1,..., T*. На каждом шаге *t*компании $\{1,\dots,n_t\}$ выбирают по очереди альтернативы — значения цен на свои услуги p_{it}, $i \in \{1,\dots,n_t\}$, $t = \overline{1,T}$.

Пусть сначала компания $i \in \{1,\dots,n_1\}$ выберет альтернативу $p_{i1} \in U_i$, где U_i — стратегия компании *i*, затем другая компания $j \in \{1,\dots,n_1\}$ $(i \neq j)$, зная выбор компании *i*, выбирает альтернативу $p_{j1} \in U_{j1}(p_{j1})$, где U_j — стратегия *j*-ой компании, а после этого компании *i* и *j* договариваются о величине параметра $\delta_{ij} \in [0,1]$. После этого компания $k \in \{1,\dots,n_1\}$ $(k \neq i, j)$, зная ценовой выбор компании *i* и *j* выбирает альтернативу $p_{k1} \in U_{k1}(p_{k1})$, где U_k — стратегия *k*-ой компании, и после этого независимо договаривается с компанией i о величине параметра $\delta_{ik} \in [0,1]$, а с компанией j о величине параметра $\delta_{jk} \in [0,1]$. Так продолжается до тех пор, пока все компании последовательно не определятся с выбором.

Пусть игроки в течение $T_{\max} - 1$ шагов выбирали свои альтернативы $\{p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{iT_{\max}-1}\}, i \in \{1, \dots, n_t\}$, тогда $\bar{p}_{iT_{\max}-1} = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{iT_{\max}-1}), i \in \{1, \dots, n_t\}$.

Пусть компании, зная предысторию $\bar{p}_{iT_{\max}-1} = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{iT_{\max}-1}), i \in \{1, \dots, n_{T_{\max}-1}\}$, выбирают последовательно свои альтернативы $p_{iT_{\max}} \in U_{T_{\max}}(\bar{p}_{iT_{\max}-1})$.

После завершения шага *Tmax*возникает вектор $(\bar{p}_{1T_{\max}}, \bar{p}_{2T_{\max}}, \dots, \bar{p}_{n_{T_{\max}}T_{\max}})$, называемая *партией* игры. По смыслу партия игры — это запись всех альтернатив, выбранных компаниями. Для любой партии $(\bar{p}_{1T_{\max}}, \bar{p}_{2T_{\max}}, \dots, \bar{p}_{n_{T_{\max}}T_{\max}})$задается выигрыш в виде прибыли $\Pi_{iT_{\max}}(\bar{p}_{1T_{\max}}, \bar{p}_{2T_{\max}}, \dots, \bar{p}_{n_{T_{\max}}T_{\max}})$, $i \in \{1, \dots, n_{T_{\max}}\}$ каждой компаний.

Описанную игру определим в нормальной форме. На шаге *t*игрок $i \in \{1, \dots, n_t\}$ может выбрать альтернативу p_{it} как значение функции $\tilde{p}_{it} : p_{it} = \tilde{p}_{it}(\bar{p}_{1t-1}, \dots, \bar{p}_{n_{t-1}t-1})$, которая должна быть определена при всевозможных значениях аргументов $\bar{p}_{1t-1}, \dots, \bar{p}_{n_{t-1}t-1}$.

Обозначим множество всех таких функций $\tilde{p}_{it}, i \in \{1, \dots, n_t\}$ через $\tilde{U}_t$. Заметим, что $\tilde{p}_{i1} = p_{i1}$, поскольку на первом шаге компания *i* никакой информацией не располагает.

Стратегия компании *i* представляет собой набор функций

$$\tilde{p}_i = (\tilde{p}_{it}, t = 1, \dots, T_{\max}) \in \tilde{X}_i = \prod_{t=1}^{T_{\max}} \tilde{U}_{it}. \tag{23}$$

Аналогично, на шаге t компания j может выбирать альтернативу p_{jt} как значение функции $\tilde{p}_{jt} : p_{jt} = \tilde{p}_{jt}(\bar{p}_{it}, \bar{p}_{jt-1})$, которая должна быть определена при всевозможных значениях аргументов $\bar{p}_{it}, \bar{p}_{jt-1}$. Обозначим множество всех таких функций $\tilde{p}_{jt}$ через $\tilde{U}_{jt}$. Стратегия компании *j* представляет собой набор функций

$$\tilde{p}_j = (\tilde{p}_{jt}, t = 1, \dots, T) \in \tilde{X}_j = \prod_{t=1}^{T} \tilde{U}_{jt}. \tag{24}$$

И так далее для остальных компаний.

Здесь можно заметить, что компании могут выбрать свои стратегии $(\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_{n_t})$ независимо друг от друга до игры, а во время игры — применять их «автоматически» по мере поступления информации. Любому набору стратегий $(\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_{n_t})$ однозначно соответствует партия игры.

Положим $\Pi_i(\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_{n_{T_{\max}}}) = \Pi_i(\bar{p}_{1T_{\max}}, \dots, \bar{p}_{n_{T_{\max}}T_{\max}})$, где $(\bar{p}_{1T_{\max}}, \dots, \bar{p}_{n_{T_{\max}}T_{\max}})$ — партия, соответствующая стратегиям $(\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_{n_{T_{\max}}})$. Итак, многошаговая игра с полной информацией определена в нормальной форме $\Gamma = \left\langle \{\tilde{X}_i\}_{i \in \{1, \dots, n_{T_{\max}}\}}, \{\Pi_i\}_{i \in \{1, \dots, n_{T_{\max}}\}} \right\rangle$.

Множества $\{U_{it}\}_{i \in \{1, \dots, n_t\}}$ являются компактами метрических пространств, а функции $\{\Pi_i\}_{i \in \{1, \dots, n_{T_{\max}}\}}$ непрерывны на произведении $\prod_{\substack{i \in \{1, \dots, n_{T_{\max}}\} \\ t \in \{1, \dots, T_{\max}\}}} U_{it}$. Определим набор стратегий

$$\tilde{p}_i^0 = (\tilde{p}_{it}^0, t = 1, \dots, T_{\max}), i \in \{1, \dots, n_{T_{\max}}\}, \tag{25}$$

используя *метод динамического программирования.* Доопределим функции прибыли $\{\Pi_i\}_{i \in \{1, \dots, n_{T_{\max}}\}}$ на всех отрезках партии вида $(\bar{p}_{it}, \bar{p}_{jt-1})$ или $(\bar{p}_{it}, \bar{p}_{jt})$ и назовем их *функциями Беллмана.*

Компоненты стратегий $\tilde{p}_{it}^0$, $\tilde{p}_{jt}^0$ и т.д. будем задавать в порядке, обратном выборам игроков.

Определим сначала $\tilde{p}_{jT_{\max}}^0$. Для этого зафиксируем произвольное значение аргументов $(\bar{p}_{iT_{\max}}, \bar{p}_{jT_{\max}-1})$ и зададим значение функции $\tilde{p}^0_{jT_{\max}}\left(\bar{p}_{iT_{\max}}, \bar{p}_{jT_{\max}-1}\right) = p^0_{jT_{\max}}$:

$$\begin{aligned}&\Pi_j\left(\bar{p}_{jT_{\max}}, \bar{p}_{jT_{\max}-1}, p^0_{jT_{\max}}\right) = \min_{p_{jT_{\max}}\in U_{jT_{\max}}} \Pi_j\left(\bar{p}_{iT_{\max}}, \bar{p}_{jT_{\max}-1}, p_{jT_{\max}}\right) = \\ &= \Pi_j\left(\bar{p}_{iT_{\max}}, \bar{p}_{jT_{\max}-1}\right).\end{aligned} \qquad (26)$$

Определим функцию $\tilde{p}^0_{iT_{\max}}$. Зафиксируем произвольное значение аргументов $\left(\bar{p}_{iT_{\max}-1}, \bar{p}_{jT_{\max}-1}\right)$ и зададим значение функции $\tilde{p}^0_{iT_{\max}}\left(\bar{p}_{iT_{\max}-1}, \bar{p}_{jT\ \max-1}\right) = p^0_{iT_{\max}}$:

$$\begin{aligned}&\Pi_i\left(\bar{p}_{iT_{\max}-1}, p^0_{iT_{\max}}, \bar{p}_{jT_{\max}-1}\right) = \min_{p_{iT_{\max}}\in U_{iT_{\max}}} \Pi_i\left(\bar{p}_{iT_{\max}-1}, p_{iT_{\max}}, \bar{p}_{jT_{\max}-1}\right) = \\ &= \Pi_i\left(\bar{p}_{iT_{\max}-1}, \bar{p}_{jT_{\max}-1}\right).\end{aligned} \qquad (27)$$

Пусть определены компоненты стратегий и значения функций Беллмана, тогда существует решение игры для каждого игрока в виде:

$$\begin{aligned}&\tilde{\upsilon}_{it} = \max_{p_{it}\in U_{it}} \Pi_{it}\left(p_{it}\right) = \max_{p_{it}\in U_{it}} \min_{p_{jt}\in U_{jt}} \Pi_{it}\left(p_{it}, p_{jt}\right) = \ldots = \\ &= \max_{p_{it}\in U_{it}} \min_{p_{jt}\in U_{jt}} \ldots \max_{p_{iT_{\max}}\in U_{iT_{\max}}} \min_{p_{jT_{\max}}\in U_{jT_{\max}}} \Pi_{it}\left(\bar{p}_{iT_{\max}}, \bar{p}_{jT_{\max}}\right).\end{aligned} \qquad (28)$$

С учетом структуры решения многошаговой антагонистической игры с полной информацией $\Gamma = \left\langle \left\{\tilde{X}_i\right\}_{i\in\left\{1,\ldots,n_{T_{\max}}\right\}}, \left\{\Pi_i\right\}_{i\in\left\{1,\ldots,n_{T_{\max}}\right\}} \right\rangle$ имеется возможность найти равновесные тарифы каждой из компаний, а также объемы услуг предоставляемых каждой из них.

Пусть каждая компания максимизирует свою прибыль по цене при многошаговой антагонистической игры с полной информацией $\Gamma = \left\langle \left\{\tilde{X}_i\right\}_{i\in\left\{1,\ldots,n_{T_{\max}}\right\}}, \left\{\Pi_i\right\}_{i\in\left\{1,\ldots,n_{T_{\max}}\right\}} \right\rangle$.

В этом случае, можно сформулировать следующую задачу оптимизации для каждой из компаний $i \in \left\{1,\ldots,n_t\right\}$ в момент времени *t*:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \Pi_{it}}{\partial p_{it}} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 \Pi_{it}}{\partial {p_{it}}^2} < 0.\end{cases} \qquad (29)$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1.

При условии, что параметры $\theta > 0$, $a_t > 0$, $b_t > 0$, $\delta_{ij} \in [0,1]$, $F_{it} > 0$ существует единственное решение задачи (29) в виде равновесного значения цен на услугу компании $i \in \left\{1,\ldots,n_t\right\}$ в момент времени *t*:

$$p^*_{it} = \left(m_{it} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n_t} \delta_{ij} m_{jt}\right)\frac{a_t}{2b_t}, \qquad (30)$$

Доказательство.

Выпишем функцию прибыли *i*-ой компании в виде:

$$\Pi_{it} = \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} [p_{it} m^2_{it}(a_t - b_t p_{it}) + m_i m_j (p_{it} - \delta_{ij} p_{jt})(a_t - b_t p_{it}) + + \delta_{ij} m_j m_i p_{it}(a_t - b_t p_{jt})] - F_{it},$$

и вычислим производные по p_{it}

$$\frac{\partial \Pi_{it}}{\partial p_{it}} = \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} [m^2_{it}(a_t - 2b_t p_{it}) + m_{it} m_{jt}(a_t - 2b_t p_{it} + \delta_{ij} b_t p_{jt}) + \delta_{ij} m_j m_i (a_t - b_t p_{jt})].$$

Так как $\partial \Pi_{it} / \partial p_{it} = 0$, то

$$m_{it}(a_t - 2b_t p_{it}) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n_t} [m_{jt}(a_t - 2b_t p_{it} + \delta_{ij} b_t p_{jt}) + \delta_{ij} m_{jt}(a_t - b_t p_{jt})] = 0,$$

откуда получим (30).

Для $\partial^2 \Pi_{it} / \partial p^2_{it}$ будем иметь

$$\frac{\partial^2 \Pi_{it}}{\partial p_{it}^2} = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} [-m_{it}^2 2b_t - m_{it} m_{jt} 2b_t - \delta_{ij} m_{jt} m_{it} b_t p_{jt}] < 0,$$

т.е. для функции Π_{it} при p_{it}^* будет иметь место максимум. *Теорема доказана.*

Следующим этапом для компаний *i* и *j* будет выбор параметра δ_{ij}. В процессе переговоров о выборе параметра δ_{ij}компании будут независимо решать такую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi_{it}(p_{it}^*, \delta_{ij})}{\partial \delta_{ij}} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 \Pi_i(p_{it}^*, \delta_{ij})}{\partial \delta_{ij}{}^2} < 0, \end{cases} \quad i, j \in \{1, \dots, n_t\}. \tag{31}$$

Она позволит максимизировать прибыль каждого из них по параметру δ_{ij}.

После подстановки соответствующих равновесных цен в функцию прибыли получим следующее равенство

$$\Pi_{it} = \frac{m_{it} m_{jt} a_t^2}{4b_t} \left((1-\delta_{ij})(1-\delta_{ij} m_{it}) + \frac{m_{it}}{m_{jt}} (1-\delta_{ij}\ m_{jt}) \right) \left(m_{it} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n_t} \delta_{ij} m_{jt} \right) - F_{it},$$

продифференцировав которое по δ_{ij} и приравняв к нулю, получим, что $\delta_{ij} = 0{,}5$.

Таким образом, равновесная цена на услугу компании $i \in \{1, \dots, n_t\}$ с учетом оптимального значения $\delta_{ij} = 0{,}5$ в момент времени *t*:

$$p_{it}^* = \left(m_{it} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n_t} m_{jt} \right) \frac{a_t}{2b_t}, \tag{32}$$

Отсюда видно, что с уменьшением доли абонентов m_{it}компании *i* ее равновесная цена будет уменьшаться, что свидетельствует об ослаблении рыночной власти компании *i*.

Равновесный спрос на услугу компании $i \in \{1, \dots, n_t\}$ в момент $t(t=1,2,...,T_{max})$ можно представить следующим образом:

$$Q^*{}_{it}(p^*{}_{it}) = m_{it} Q_t(p^*{}_{it}) = m_{it} a_t \left(1 - \frac{m_{it}}{2} - \frac{1}{4} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n_t} m_{jt} \right), \tag{33}$$

где p^*_{it}– равновесная цена услуги компании $i \in \{1, \dots, n_t\}$ в момент $t(t=1,2,...,T_{max})$.

Общий равновесный рыночный спрос на услугу в момент $t(t=1,2,...,T_{max})$ имеет вид:

$$Q^*{}_t = \sum_{i=1}^{n_t} Q^*{}_{it}(p^*{}_{it}) = \sum_{i=1}^{n_t} m_{it} Q_t(p^*{}_{it}) = a_t \sum_{i=1}^{n_t} m_{it} \left(1 - \frac{m_{it}}{2} - \frac{1}{4} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n_t} m_{jt} \right), \tag{34}$$

Можно показать, что при равномерном распределении абонентов между компаниями эта величина достигает максимума.

Стратегия государства для создания конкурентной среды на рынке телекоммуникационных услуг в условиях ограниченной конкуренции

Для создания конкурентной среды основной стратегией государства является пресечение ценового сговора между компаниями, которое сводится к требованию $\delta_{ij} = 0$, и увеличения числа компаний на рынке. С этой целью государство должно максимально упростить возможность выхода на рынок новых компаний, а также требовать от них решать не задачу максимизации прибылей, а задачу, связанную с покрытием своих издержек, которую можно сформулировать для каждой из компаний $i \in \{1, \dots, n_t\}$ в момент времени *t* таким образом:

$$\Pi_{it} = 0,\ т.е.\ TR_{it} = F_{it}. \tag{35}$$

В этом случае, компании покрывают свои издержки, но прибыль не получает. Это условие является главной характеристикой абсолютно конкурентного рынка. ё

Теорема 2.

При условии, что параметры $\theta > 0,\ a_t > 0,\ b_t > 0,\ \delta_{ij} = 0,\ F_{it} > 0$ существует единственное решение задачи (35) в виде равновесного значения цен на услугу компании $i \in \{1, \dots, n_t\}$ в момент времени *t*:

$$p_{it}^{*} = \frac{a_t}{b_t}\left(1-2m_i b_t F_{it}\right). \qquad (36)$$

Доказательство.

Выпишем функцию прибыли *i*-ой компании в виде:

$$\Pi_{it} = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} [\, p_{it} m_{it}^{2}(a_t - b_t p_{it}) + m_i m_j (p_{it} - \delta_{ij} p_{jt})(a_t - b_t p_{it}) + + \delta_{ij} m_j m_i p_{it}(a_t - b_t p_{jt})] - F_{it},$$

и потребуем, чтобы $\delta_{ij} = 0, \ \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} [\, p_{it} m_{it}^{2}(a_t - b_t p_{it}) + m_i m_j p_{it}(a_t - b_t p_{it})] = F_{it}$.

Решив это уравнение, получим (36). *Теорема доказана.*

Можно заметить, что при $n_t \to \infty$ для компании *i* будет иметь место $m_i \to 0$, что обеспечит сходимость рынка к минимальной цене на услугу $p^{*}_{it} \to a_t/b_t$.

Заключение

Целью данной работы являлось построение модели динамического ценообразования на рынка телекоммуникаций при условии ограниченной конкуренции.

Для достижения цели данной работы был применен комплексный подход, заключающийся в использовании методов экономико-математического моделирования, теории массового обслуживания, математической теории телетрафика. На основе построенной динической экономико-математической модели ценообразования на рынке телекоммуникаций при условии ограниченной конкуренции предложен метод решения задачи формирования оптимальной ценовой политики телекоммуникационными компаниями с учетом обеспечения качества предоставляемых услуг.

Предложенная экономико-математическая модель ценообразования на рынке телекоммуникаций при условии ограниченной конкуренции позволит провести анализ конкурентной среды в различных сегментах телекоммуникационного рынка, определить стратегические направления его развития, особенности инновационной политики в процессе внедрения телекоммуникационных услуг нового поколения 5G, а также, в случае необходимости, выработать подходы к государственному регулированию телекоммуникационного рынка с целью поддержания конкуреной среды на рынке связи.

Благодарности

Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН «5-100» и при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 12-34-56789 и № 12-34-56789.

References

1. Armstrong M., Vickers J. The Access Pricing Problem with Deregulation: A Note // Journal of Industrial Economics. — 1996. — Vol. 46. — P. 115-121.
2. Armstrong M. Competition in Telecommunications. – Oxford Review of Economic Policy, 1997.
3. Armstrong M. Network Interconnection in Telecommunications // Economic Journal. — 1998. — 108: 545-564, 1998.
4. Balakrishnan A., Magnanti T.L., Shulman A., Wong R.T. Models for planning capacity expansion in local access telecommunication networks. – Annals of Operations Research, 1991.
5. Carter M., Wright J. Interconnection in Network Industries. – Kluwer Academic Publishers, 1999.
6. Cave M. and Doyle C. Access pricing in network utilities in theory and practice. – Utilities Policy, 1998.
7. Doganoglu T., Tauman Y. Network Competition with Reciprocal Proportional Access Charge Rules. – SUNY at Stony Brook, 1996.
8. Gaidamaka Y., Sopin E., Talanova M. Approach to the analysis of probability measures of cloud computing systems with dynamic scaling // Communications in Computer and Information Science. — 2016. — Vol. 601. — P. 121-131.
9. Gruber H. The Economics of Mobile Telecommunication. – Cambridge University Press, 2005.
10. Laffont, J-J., J. Tirole Ceating Competition Through Interconnection: Theory and Practice. – Institut d'Economie Industrielle, 1996.
11. Laffont, J-J., J. Tirole Access Pricing and Competition. – European Economic Review, 1994.
12. Marti K. Stochastic optimization methods. – Springer Berlin Heidelberg, 2005.
13. Samouylov K., Naumov V., Sopin E., Gudkova I., Shorgin S. Sojourn time analysis for processor sharing loss system with unreliable server // Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics). — 2016. — Vol. 9845. — P. 284-297.
14. Stein, Jerome L. Stochastic Optimal Control, International Finance, and Debt Crises. – Oxford University Press, 2006.

Об авторах:

Васильев Сергей Анатольевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей, Российский университет дружбы народов, svasilyev@sci.pfu.edu.ru

Харун Хасан Салех, аспирант кафедры прикладной информатики и теории вероятностей, Российский университет дружбы народов, Республика Чад, harounhassan198@yahoo.fr

Note on the authors:
Vasilyev Sergey A., Candidate of Physico-mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Applied Probability and Informatics, Peoples' Friendship University of Russia, svasilyev@sci.pfu.edu.ru
Haroun Hassan Salih, Postgraduate Student, Department of Applied Probability and Informatics, Peoples' Friendship University of Russia, The Republic of Chad, harounhassan198@yahoo.fr