УДК 004.021+519.633

Васильев А.Н., Свинцов М.В., Тархов Д.А.

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург, Россия

РАЗВИТИЕ АНАЛИЗА МНОГОСЛОЙНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ*

Аннотация

В данной статье продолжается рассмотрение методов построения многослойных приближенных решений дифференциальных уравнений. Методы работы основаны на классических формулах численного решения дифференциальных уравнений. Особенность методов состоит в использовании данных формул для интервала переменной длины. В результате получается приближённое решение в виде функции, а не в виде таблицы чисел. Методы успешно применялись в случае обыкновенных дифференциальных уравнений. Статья является одной из первых, в которых рассматривается распространение этих методов на уравнения в частных производных. Мы исследуем одномерное волновое уравнение с начальным условием на производную в виде гауссиана, с нулевым начальным условием на функцию и с нулевым граничным условием на бесконечности по пространственной переменной. В силу того, что линейной комбинацией гауссиан может быть сколь угодно точно приближена произвольная функция из достаточно широкого класса, рассматриваемая задача обладает достаточной общностью. Рассмотрены приближённые решения, которые получаются применением метода Эйлера, уточнённого метода Эйлера, исправленного метода Эйлера и метода Штёрмера. Проведено сравнение представленных методов на основе вычислительного эксперимента. Наиболее точным в большинстве вычислительных экспериментов оказался метод Штёрмера. Предложенные нами методы без существенной модификации могут быть применены и к другим краевым задачам для уравнений в частных производных.

Ключевые слова

Вычислительные методы; волновое уравнение; начально-краевая задача, метод конечных разностей; многослойное приближённое решение.

Svintsov M.V., Tarkhov D.A., Vasilyev A.N.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint-Petersburg, Russia

DEVELOPMENT OF ANALYSIS OF MULTILAYER METHODS FOR SOLVING WAVE EQUATION WITH SPECIAL INITIAL CONDITIONS

Abstract

This article continues the discussion of methods for constructing approximate multilayer solutions of differential equations. Study methods are based on the classical formulas for the numerical solution of differential equations. The peculiarity of the methods is to use these formulas for an interval of variable length. The result is an approximate solution in the form of a function and not a table of numbers. Techniques have been successfully applied in the case of ordinary differential equations. The article is one of the first, which focuses on the dissemination of these methods to partial differential equations. We investigate the one-dimensional wave equation with an initial condition on the derivative in the form of a Gaussian, with a zero initial condition to the function, and with zero boundary condition at spatial infinity. Because an arbitrary function of the various classes can be approximated with a high degree of accuracy by a linear combination of Gaussians, the considered problem is of sufficient generality. We obtain the approximate solutions by applying the Euler method, the refined Euler method, the corrected Euler method, and the Störmer method. We compare the presented methods by computational experiment. The Störmer method was the most accurate in most

* **Труды II Международной научной конференции «Конвергентные когнитивно-информационные технологии» (Convergent'2017), Москва, 24-26 ноября, 2017**

Proceedings of the II International scientific conference "Convergent cognitive information technologies" (Convergent'2017), Moscow, Russia, November 24-26, 2017

computational experiments. Our proposed methods without significant modification can be applied to other boundary value problems for partial differential equations.

Keywords

Computational methods; wave equation; initial-boundary value problem; finite difference method; multilayer approximate solution.

Введение

В статье [1] авторами были впервые представлены методы построения приближённых решений дифференциальных уравнений в виде функций, основанные на классических конечно-разностных схемах. С тех пор продолжается работа над исследованием подобных многослойных решений и их свойств для разных типов уравнений [2-4]. Проводится анализ зависимости точности построенного решения от выбранных базовых схем и выбранного числа слоев.

В настоящей статье рассматривается решение одномерного волнового уравнения, как представителя линейного гиперболического дифференциального уравнения в частных производных. Уравнение решается на всей пространственной оси с начальным условием на производную в виде гауссиана с возможностью распространения на произвольную функцию.

Постановка задачи и описание методов

Рассмотрим одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{1}$$

со специальными начальными условиями

$$y(0,x) = 0, \ \frac{\partial y}{\partial t}(0,x) = f(x). \tag{1a}$$

где $t \in R^+$ – время, $x \in R$ – пространственная переменная.

Метод из статей [1, 2, 5] состоит в применении выбранной разностной схемы на интервале с переменным правым концом. Уравнение (1) рассматривалось как уравнение относительно переменной t в операторном виде

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = A(y), \tag{2}$$

где $A(y) = \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

Для реализации методов, являющихся модификацией формул численного решения уравнений и систем уравнений первого порядка, задача (1) рассматривалась также в виде системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} = z, \\ \dfrac{\partial z}{\partial t} = A(y), \end{cases} \tag{3}$$

где вспомогательная функция $z(t,x)$ удовлетворяет всем необходимым условиям.

Известно [6], что линейными комбинациями сдвигов и растяжений стандартных функций нейросетевых базисов (сигмоиды, гауссианы и другие) можно приблизить произвольные функции из широкого класса. Поэтому, в данной работе мы рассмотрели начально-краевую задачу для уравнения (1) с условием вида

$$\frac{\partial y}{\partial t}(0,x) = \exp(-x^2), \ x \in R. \tag{4}$$

Функция (4) является простейшей радиально-базисной функцией (РБФ). В общем случае начальное условие может быть представлено как

$$y(0,x) = f(x), \ \frac{\partial y}{\partial t}(0,x) = \varphi(x), \tag{4a}$$

где начальные условия $f(x), \varphi(x)$ линейными комбинациями сдвигов и растяжений могут быть приближены выражениями

$$f(x) \cong \sum_{i=1}^{n} \omega_i \exp(-a^2{}_i (x-b_i)^2) ,$$

$$\varphi(x) \cong \sum_{i=1}^{n} \omega_i^* \exp(-\alpha_i^2 (x-\beta_i)^2)$$

.

Пусть мы построили приближенные решения $u(t,x)$ волнового уравнения для начального условия $y(0,x)=\exp(-x^2)$, $\frac{\partial y}{\partial t}(0,x)=0$ и $v(t,x)$ для начального условия $y(0,x)=0$, $\frac{\partial y}{\partial t}(0,x)=\exp(-x^2)$. Тогда для начального условия вида (4а) общий вид решения задачи (1) будет выглядеть как

$$U(t,x) \cong \sum_{i=1}^{n} \omega_i u(t, a_i(x-b_i)) + \sum_{i=1}^{n} \omega_i^* v(t, \alpha_i^2 (x-\beta_i)).$$

Для решения задач (2)-(4) нами было рассмотрено несколько базовых методов [7, 8]. Рассматривались как методы, применяемые для решения дифференциальных уравнений первого порядка – различные вариации метода Эйлера, так и метод Штёрмера для решения задач второго порядка специального вида.

Всюду далее число N означает количество слоев итоговой многослойной аппроксимации $y_N(t,x)$, от которого, в том числе, зависит и величина шага $h(t)=t/N$.

1. Метод Эйлера, который для формулировки (3)-(4) имеет вид:

$$\begin{cases} z_{k+1}(t,x) = z_k(t,x) + h(t)\cdot \dfrac{\partial^2 y_k(t,x)}{\partial x^2}, \\ y_{k+1}(t,x) = y_k(t,x) + h(t)\cdot z_k(t,x), \end{cases} \tag{5}$$

где $k=0,\ldots,N-1$. Отметим, что к условию (4) добавляется $y_0(t,x)=0$.

1. Уточненный метод Эйлера для задачи (3)-(4):

$$\begin{cases} z_{k+1}(t,x) = z_{k-1}(t,x) + 2h(t)\cdot \dfrac{\partial^2 y_k(t,x)}{\partial x^2}, \\ y_{k+1}(t,x) = y_{k-1}(t,x) + 2h(t)\cdot z_k(t,x), \end{cases} \tag{6}$$

где $k=1,\ldots,N-1$. Здесь, кроме условия (4) имеют место соотношения $y_0(t,x)=0$, $y_1(t,x)=h(t)\exp(-x^2)$, $z_0(t,x)=z_1(t,x)=\exp(-x^2)$.

2. Исправленный метод Эйлера для задачи (3)-(4):

$$\begin{cases} z_{k+1}(t,x) = z_k(t,x) + h(t)\cdot \dfrac{\partial^2 y_k(t,x)}{\partial x^2} + \dfrac{1}{2}h^2(t)\cdot \dfrac{\partial^2 z_k(t,x)}{\partial x^2}, \\ y_{k+1}(t,x) = y_k(t,x) + h(t)\cdot z_k(t,x) + \dfrac{1}{2}h^2(t)\cdot \dfrac{\partial^2 y_k(t,x)}{\partial x^2}, \end{cases} \tag{7}$$

где $k=0,\ldots,N-1$. Начальные условия совпадают с условиями для классического метода Эйлера.

3. Метод Штёрмера для задачи в формулировке (2), (4):

$$y_{k+1}(t,x) = 2y_k(t,x) - y_{k-1}(t,x) + h^2(t)\cdot \frac{\partial^2 y_k(t,x)}{\partial x^2}, \tag{8}$$

где $k=1,\ldots,N-1$. Начальные условия $y_0(t,x)=0$, $y_1(t,x)=h(t)\exp(-x^2)$.

Модификации, основанные на методе Штёрмера

Вычисления производных по пространственной переменной в итерационных схемах (5)-(8) представляются излишне громоздкими и занимают существенное время всего вычислительного процесса. Нам представилось естественным заменить вторую производную ее разностной аппроксимацией. В качестве отправного был использован метод Штермера для задачи в формулировке (2), (4).

Возможности для различных модификаций формулы (8) дает как выбор шага $h(t)$ в методе Штёрмера, так и шаг аппроксимации производной. В данной работе нами были рассмотрены следующие варианты.

1. Шаг аппроксимации производной H не зависит от шага $h(t)$ самого метода Штёрмера. У

решения появляется дополнительный параметр H.

Итерационная формула имеет вид

$$y_{k+1}(t,x,H)=2y_k(t,x,H)-y_{k-1}(t,x,H)+h^2(t)\cdot\frac{y_k(t,x+H,H)+y_k(t,x-H,H)-2y_k(t,x,H)}{H^2},$$

где $k=1,\dots,N-1$. Как и ранее, мы рассматриваем $h(t)=t/N$, где N – число слоев.

2. Шаг аппроксимации производной $H=\sqrt{h(t)}$.
3. Шаг аппроксимации производной $H=h(t)$.

Результаты вычислений

Аппроксимация решения задачи (1) при условии (4) была вычислена по формулам (5)-(8) для различного числа N слоев. Для разных значений временной переменной, от близкого $t=0$ до $t=3$ (мы рассматриваем уравнение в безразмерном виде), была вычислена максимальная ошибка аппроксимации – максимальный модуль ошибки в 1000 равноотстоящих точках относительно аналитического решения $y^*(t,x)$ задачи (1):

$$e_{\max}(t)=\max\{|y^*(t,x)-y(t,x)|;\ x=i\cdot 15/1000,\ i=1,\dots,1000\}.$$

Таблица 1. Максимальная ошибка в точке $t=0.1$

	N=5	N=10	N=20	N=50
Метод Эйлера	e_{max}=0.00172258	e_{max}=0.00009266	e_{max}=0.00004789	e_{max}=0.00001954
Уточненный Эйлер	e_{max}=0.00001294	e_{max}=0.00001313	e_{max}=3.28186e-6	e_{max}=5.25045e-7
Исправленный Эйлер	e_{max}=0.00001304	e_{max}=3.24618e-6	e_{max}=8.09811e-7	e_{max}=1.29398e-7
Штермер	e_{max}=0.00001313	e_{max}=3.28186e-6	e_{max}=8.20392e-7	e_{max}=1.31259e-7
Модифицированный Штермер	e_{max}=0.00001319	e_{max}=3.29818e-6	e_{max}=8.24503e-7	e_{max}=1.31919e-7

Таблица 2. Максимальная ошибка в точке $t=1$

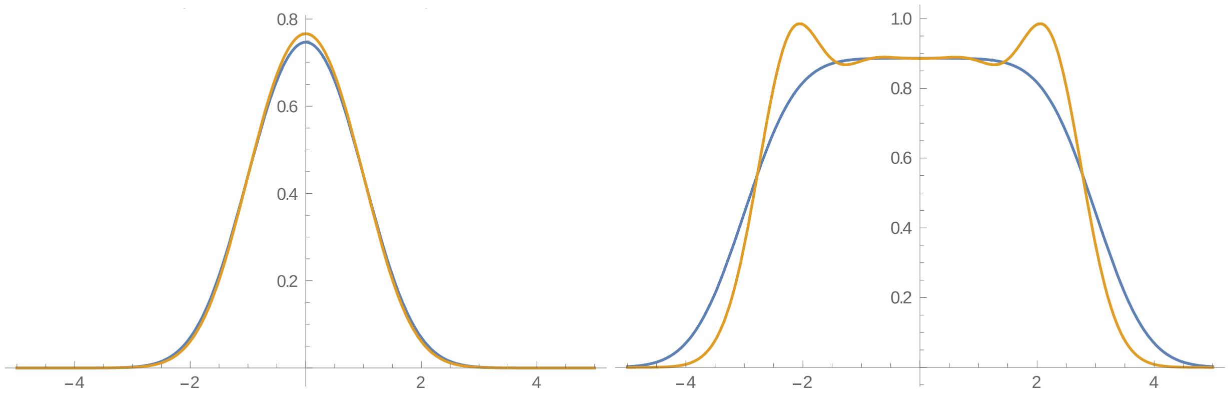
	N=5	N=10	N=20	N=50
Метод Эйлера	e_{max}=0.0969773	e_{max}=0.0419807	e_{max}=0.0195704	e_{max}=0.0075341
Уточненный Эйлер	e_{max}=0.0071519	e_{max}=0.0028264	e_{max}=0.0006968	e_{max}=0.0001111
Исправленный Эйлер	e_{max}=0.0053022	e_{max}=0.0013861	e_{max}=0.0003568	e_{max}=0.0000581
Штермер	e_{max}=0.0028264	e_{max}=0.0006968	e_{max}=0.0001737	e_{max}=0.0000278
Модифицированный Штермер	e_{max}=0.0049492	e_{max}=0.0012288	e_{max}=0.0003067	e_{max}=0.00004904

Таблица 3. Максимальная ошибка в точке $t=3$

	N=5	N=10	N=20	N=50
Метод Эйлера	e_{max}=1.32383	e_{max}=0.62337	e_{max}=0.195054	e_{max}=0.0480651
Уточненный Эйлер	e_{max}=8.39208	e_{max}=3.11714	e_{max}=0.013172	e_{max}=0.0019675
Исправленный Эйлер	e_{max}=0.87565	e_{max}=0.066003	e_{max}=0.0115796	e_{max}=0.00180301
Штермер	e_{max}=3.11714	e_{max}=0.01317	e_{max}=0.003093	e_{max}=0.0004877
Модифцированный Штермер	e_{max}=0.03359	e_{max}=0.00672	e_{max}=0.001625	e_{max}=0.0002578

Как видно из таблиц, при малых временах и достаточном количестве слоев можно использовать и классический метод Эйлера. Наилучший результат среди представленных методов дают метод и модифицированный методы Штермера, показывая сходные с уточненным и исправленным методами Эйлера ошибки на малых временах. На больших временах хорошие результаты показывает модифицированный метод Штермера.

Проиллюстрируем некоторые результаты графиками. Рассмотрим случай $N=20$.

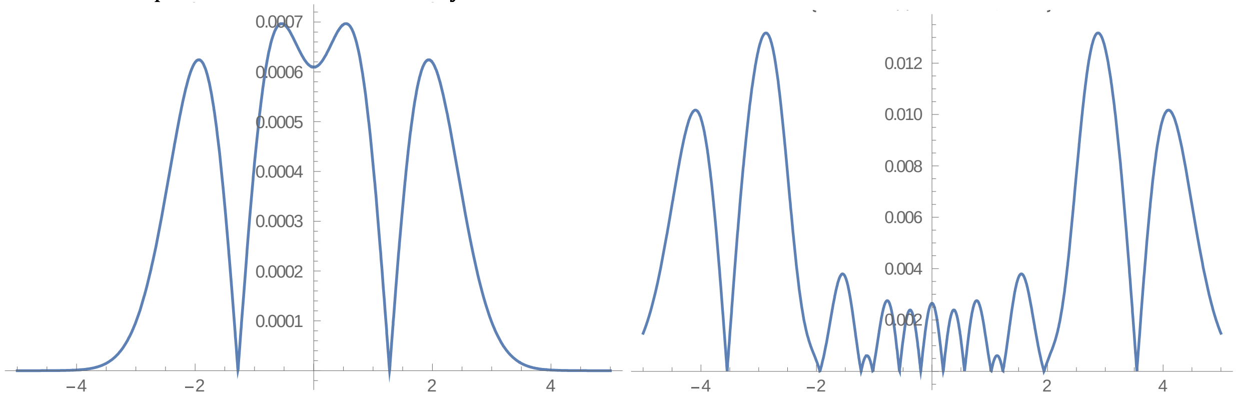


а) *б)*

Рис.1 Графики точного решения (синяя линия) и приближённого решения, построенного по методу Эйлера (коричневая линия) а) при $t = 1$, *б) при* $t = 3$

Метод Эйлера применим только при малых временах $t < 1$. При больших значениях t поведение приближенного решения не соответствует точному решению.

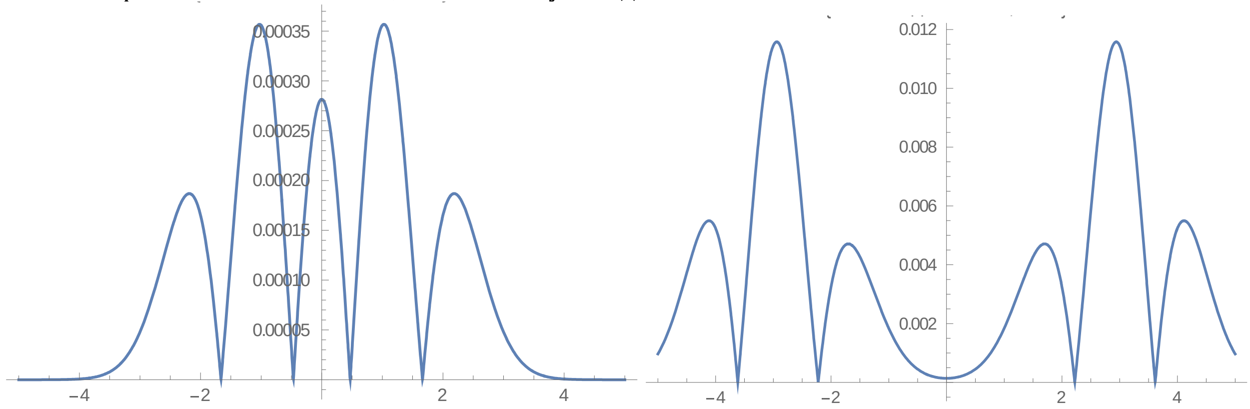
Для демонстрации дальнейших результатов будут приводиться графики ошибок, так как точное и приближенное решение становятся визуально неотличимы.



а) *б)*

Рис.2 Графики разности точного решения и приближённого решения, построенного по уточнённому методу Эйлера а) при $t = 1$, *б) при* $t = 3$

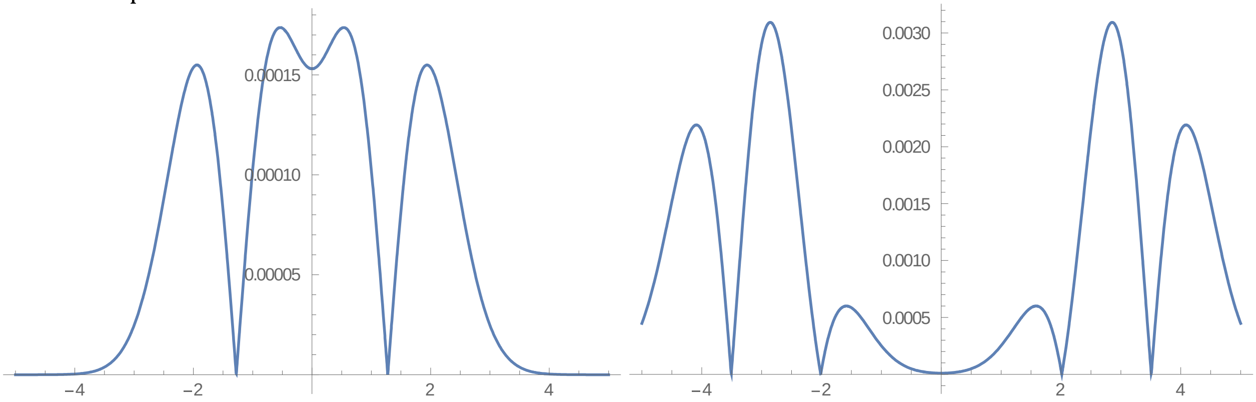
Уточненный метод Эйлер показывает существенно более хорошие результаты. Это является большим преимуществом метода, учитывая также, что формулы, полученные с помощью этого метода, являются самыми простыми в связи с тем, что используется двойной шаг.



а) б)

Рис.3 Графики разности точного решения и приближённого решения, построенного по исправленному методу Эйлера а) при $t = 1$, *б) при* $t = 3$

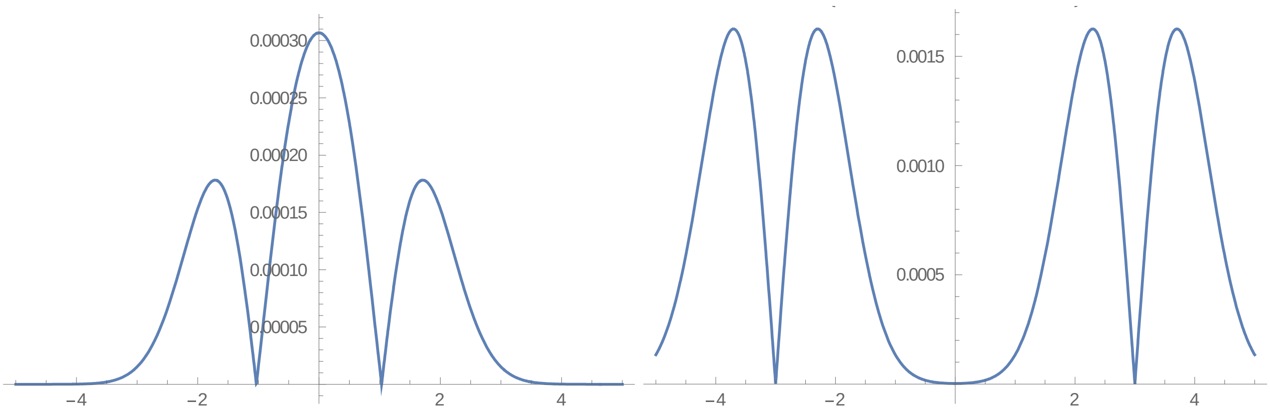
В отличие от аналогичных результатов, полученных для волнового уравнения с начальным условием на функцию в виде гауссина, в данной постановке этот метод не является самым точным, при $t > 1$ сильно уступая обычному и модифицированным методам Штермера. В связи с большой неоправданной трудоемкостью данного метода он не рекомендуется к нахождению решения данной задачи, особенно на больших временах.



а) *б)*

Рис.4 Графики разности точного решения и приближённого решения, построенного по методу Штёрмера а) при $t = 1$, б) при $t = 3$

Метод Штермера является самым эффективным методом для данной задачи. При невысокой трудоемкости, сравнимой с уточненным методом Эйлера, он дает и схожие, и при высоких временах более точные, результаты по сравнению с исправленным методом Эйлера.



а) *б)*

Рис.5 Графики разности точного решения и приближённого решения, построенного по методу Штёрмера с заменой второй производной по x соответствующей разделённой разностью с $H = h(t)$ а) при $t = 1$, б) при $t = 3$

Модификация метода Штермера с третьим вариантом регулировки шага практически не уступает обычному методу Штермера на малых временах, но сильно увеличивает точность при $t > 1$, что позволяет его рекомендовать как самый точный метод для решения данной задачи. Модификация метода Штермера со вторым вариантом регулировки шага $H = \sqrt{h(t)}$ показывает сходные результаты.

Заметим, что при такой модификации получается непрерывный аналог обычной для данной задачи разностной схемы.

Заключение

Данная статья показывает, что методы, представленные в работах [1, 2] могут быть применены не только к обыкновенным дифференциальным уравнениям [2-4], но и к уравнениям в частных производных (также [5]). Особенностью и преимуществом данного метода по сравнению с классическими методами численного решения, является нахождение приближенного решения в виде единой функции, а не таблицы чисел или кусочно-непрерывной аппроксимации. Следствием такого подхода является удобство дальнейшего анализа задачи в зависимости от параметров, уточнения модели экспериментальными данными и т.д.

Литература

1. Lazovskaya T., Tarkhov D. Multilayer neural network models based on grid methods, IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 158 (2016) http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/158/1/01206
2. Vasilyev Alexander, Tarkhov Dmitry, Shemyakina Tatyana APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTIONS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS// Selected Papers of the XI International Scientific-Practical Conference Modern Information Technologies and IT-Education (SITITO 2016) Moscow, Russia, November 25-26, 2016 p.393-400 http://ceur-ws.org/Vol-1761/paper50.pdf
3. Vasilyev Alexander, Tarkhov Dmitry, Bolgov Ivan, Kaverzneva Tatyana, Kolesova Svetlana, Lazovskaya Tatyana, Lukinskiy Evgeniy, Petrov Alexey, Filkin Vladimir MULTILAYER NEURAL NETWORK MODELs BASED ON EXPERIMENTAL DATA FOR PROCESSES OF SAMPLE DEFORMATION AND DESTRUCTION// Selected Papers of the First International Scientific Conference Convergent Cognitive Information Technologies (Convergent 2016) Moscow, Russia, November 25-26, 2016 p.6-14 http://ceur-ws.org/Vol-1763/paper01.pdf
4. Tarkhov Dmitry, Shershneva Ekaterina APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTIONS OF MATHIEU'S EQUATIONS BASED ON CLASSICAL NUMERICAL METHODS// Selected Papers of the XI International Scientific-Practical Conference Modern Information Technologies and IT-Education (SITITO 2016) Moscow, Russia, November 25-26, 2016 p.356-362 http://ceur-ws.org/Vol-1761/paper46.pdf
5. Lazovskaya Tatiana, Tarkhov Dmitry, Vasilyev Alexander Multi-Layer Solution of Heat Equation// Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research, Studies in Computational Intelligence 736, Springer International Publishing, 2018 p.17-22.
6. Haykin S. Neural Networks: A Comprehensive Foundation, Prentice Hall., 1999, 823 p.
7. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. – М.: Высшая школа, 2002. – 848 с.
8. Hairer E., Norsett S. P., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems, Springer-Verlag, Berlin, 1987. xiv + 480 pp.

References

1. Lazovskaya T., Tarkhov D. Multilayer neural network models based on grid methods, IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 158 (2016) http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/158/1/01206
2. Vasilyev Alexander, Tarkhov Dmitry, Shemyakina Tatyana APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTIONS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS// Selected Papers of the XI International Scientific-Practical Conference Modern Information Technologies and IT-Education (SITITO 2016) Moscow, Russia, November 25-26, 2016 p.393-400 http://ceur-ws.org/Vol-1761/paper50.pdf
3. Vasilyev Alexander, Tarkhov Dmitry, Bolgov Ivan, Kaverzneva Tatyana, Kolesova Svetlana, Lazovskaya Tatyana, Lukinskiy Evgeniy, Petrov Alexey, Filkin Vladimir MULTILAYER NEURAL NETWORK MODELs BASED ON EXPERIMENTAL DATA FOR PROCESSES OF SAMPLE DEFORMATION AND DESTRUCTION// Selected Papers of the First International Scientific Conference Convergent Cognitive Information Technologies (Convergent 2016) Moscow, Russia, November 25-26, 2016 p.6-14 http://ceur-ws.org/Vol-1763/paper01.pdf
4. Tarkhov Dmitry, Shershneva Ekaterina APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTIONS OF MATHIEU'S EQUATIONS BASED ON CLASSICAL NUMERICAL METHODS// Selected Papers of the XI International Scientific-Practical Conference Modern Information Technologies and IT-Education (SITITO 2016) Moscow, Russia, November 25-26, 2016 p.356-362 http://ceur-ws.org/Vol-1761/paper46.pdf
5. Lazovskaya Tatiana, Tarkhov Dmitry, Vasilyev Alexander Multi-Layer Solution of Heat Equation// Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research, Studies in Computational Intelligence 736, Springer International Publishing, 2018 p.17-22
6. Haykin S. Neural Networks: A Comprehensive Foundation, Prentice Hall., 1999, 823 p.
7. Verzhbickij V.M. Osnovy chislennyh metodov. – M.: Vysshaja shkola, 2002. – 848 s.
8. Hairer E., Norsett S. P., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems, Springer-Verlag, Berlin, 1987. xiv + 480 pp.

Об авторах:

Васильев Александр Николаевич, доктор технических наук, профессор, кафедра «Высшая математика», Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, a.n.vasilyev@gmail.com

Свинцов Михаил Викторович, студент 4 курса кафедры Космических исследований, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, misha.svintsow@gmail.com

Тархов Дмитрий Альбертович, доктор технических наук, профессор, кафедра «Высшая математика», Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, dtarkhov@gmail.com

Note on the authors:

Vasilyev Alexander N., Doctor of Engineering Sciences, Professor, Department of Higher Mathematics, Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University, a.n.vasilyev@gmail.com

Svintsov Mikhail V., 4th year student, Department of Space Research, Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnical University, misha.svintsow@gmail.com

Tarkhov Dmitry A., Doctor of Engineering Sciences, Professor, Department of Higher Mathematics, Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University, dtarkhov@gmail.com