УДК 681.5

Тихонов Н.О., Лепихин Т.А., Жабко Н.А.

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Россия

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТРИКОПТЕРА*

Аннотация

В данной статье содержится описание беспилотного летательного аппарата вида трикоптер, демонстрируется схема построения его математической модели как управляемого динамического объекта с помощью установленных на устройстве элементов управления, которая опирается на четыре основных модели поведения. Интерес к такого рода устройствам обусловлен тем, что в сравнении с устройствами всего класса мультироторных БПЛА, использование трикоптеров часто оказывается наиболее обоснованным благодаря их компактности, хорошей маневренности (особенно по углам тангажа и рысканья), а также хорошей полевой ремонтопригодности. С целью дальнейшей разработки действующего прототипа БПЛА рассматриваемого типа, который сможет выполнять все поставленные перед ним задачи, такие как аэросъемка, исследование территории, перехват других дронов, в работе приводится довольно подробное описание процесса построения математической модели динамики объекта в пространстве. Сформированная математическая модель описывается системой обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений 12-го порядка и может быть использована для исследования особенностей поведения трикоптера в зависимости от возможных изменений его конструкции, оптимизации параметров объекта при его конструировании, формирования достаточно гибких и эффективных законов автоматического управления им.

Ключевые слова

БПЛА; математическая модель; трикоптер.

Tikhonov N.O., Lepikhin T.A., Zhabko N.A.

Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russia

MATHEMATICAL MODELLING OF TRICOPTER

Abstract

In this article the unmanned aerial vehicle of the tricopter type is described, the scheme of constructing its mathematical model as a controlled dynamic object using the controls installed on the device, which is based on four basic models of behavior, is demonstrated. The interest in such devices is caused by the fact that, in comparison with devices of the whole class of multi-rotor UAVs, the use of tricopters is often the most reasonable due to their compactness, good maneuverability (especially in the angles of pitch and yaw), and good field repairability. In order to further develop the prototype of the UAV of the discussed type, which will be able to perform all the tasks assigned to it, such as aerial survey, exploration of the territory, interception of other drones, the paper provides a rather detailed description of the process of constructing a mathematical model of object dynamics in space. The constructed mathematical model is described by a system of ordinary nonlinear differential equations of the 12th order and can be used to investigate the behavior of the tricopter depending on possible changes in its design, optimize the parameters of the device during its design, and formulate sufficiently flexible and effective laws for automatic control.

Keywords

UAV; mathematical model; tricopter.

* **Труды II Международной научной конференции «Конвергентные когнитивно-информационные технологии» (Convergent'2017), Москва, 24-26 ноября 2017**

Proceedings of the II International scientific conference "Convergent cognitive information technologies" (Convergent'2017), Moscow, Russia, November 24-26, 2017

Введение

В современном мире остро возрастает потребность в автономной технике, в частности в беспилотных летательных аппаратах (БПЛА). Исключительно популярными являются устройства класса мультироторных БПЛА благодаря интенсивному развитию сферы их применимости для решения как гражданских, так и военных задач. Расширение круга задач, решаемых с помощью таких устройств, разнообразие их возможных конструкций обуславливает непрестанный интерес в проведении исследований в области разработки подобных аппаратов и решению вопросов автоматизации управления ими. Для решения многих задач из всего класса мультироторных БПЛА оказывается наиболее выгодным в использовании трикоптер, что обуславливается компактностью самого устройства, повышенной маневренностью (особенно по углам тангажа и рысканья), а также большей полевой ремонтопригодностью. При этом доступные источники, содержащие описание элементов математической модели трикоптера и соответствующих законов управления, которые можно использовать при разработке собственного устройства, довольно немногочисленны в сравнении с доступными источниками по аналогичным вопросам, касающимся устройств типа квадрокоптер.

Цель исследования

Целью исследования в данной работе является построение действующей математической модели трикоптера, разработка схемы управления им с помощью установленных на устройстве элементов управления. Такая потребность обуславливается необходимостью использования математической модели для исследования особенностей поведения трикоптера в зависимости от возможных изменений его конструкции для разработки реального устройства и формирования достаточно гибких и эффективных законов автоматического управления им. В связи с этим, в работе приводится довольно подробное описание процесса построения математической модели рассматриваемого физического объекта в пространстве.

Описание летательного аппарата

На рис. 1 приведена общая схема трикоптера.

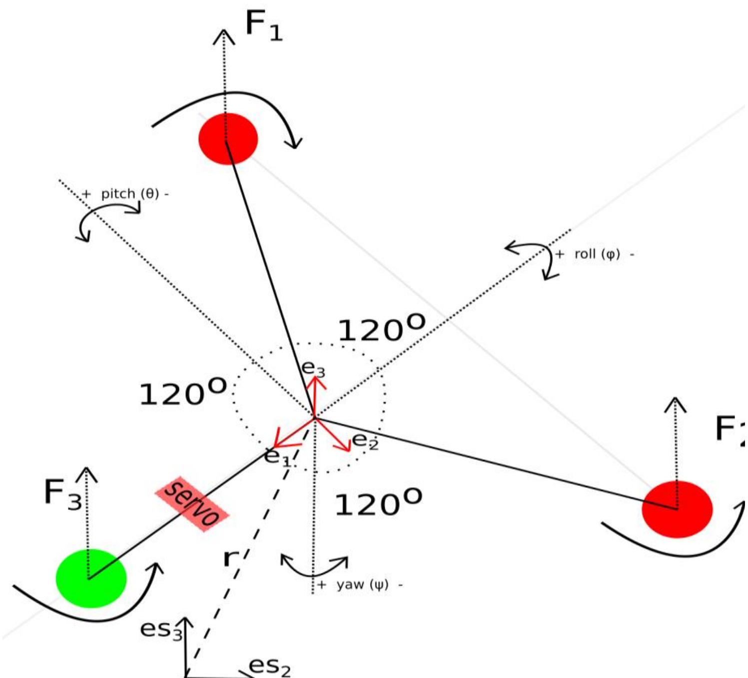

Рис. 1 Схема трикоптера

На схеме представлены две системы координат, используемые для описания модели движения трикоптера: связанная (e_1,e_2,e_3) и фиксированная (es_1,es_2,es_3), начало координат которой совмещено с центром масс трикоптера. Исследуемый дрон состоит из трех лучей, двух передних и одного заднего относительно оси e_2. Углы между ними равны 120°. На каждом луче установлено по одному двигателю. Двигатель F_1 вращает пропеллер по часовой стрелке, а двигатели F_2 и F_3 – против часовой. Хвостовой двигатель, в отличие от передних, подвижный и может менять свой угол наклона относительно оси e_2 в пределах от -90° до +90°. Расположение передних лучей позволяет устанавливать широкоугольные камеры, а также оборудование, требующее широкий угол обзора.

Стратегии управления

Для выполнения управляемого движения трикоптера (рис. 2a, исходное положение) в пространстве достаточно задать четыре основных модели поведения:

1. Первая модель поведения отвечает за вертикальное движение трикоптера. Соответственно для осуществления спуска или подъема необходимо уменьшать или увеличивать обороты двух передних двигателей на одинаковую величину и хвостового на определенное значение, чтобы не породить вращательное движение трикоптера вокруг своей оси (соответствует рис. 2b);

2. Вторая задача – осуществить движение коптера по углу крена. В частности, для движения по крену вправо необходимо увеличить обороты левого двигателя и уменьшить обороты правого, для крена влево — наоборот, увеличить обороты правого двигателя и уменьшить обороты левого (соответствует рис. 2c);

3. Третья задача состоит в повороте объекта управления по тангажу, т. е., по сути, осуществлении наклона коптера вперед или назад. Выполнение указанной задачи, в частности, при наклоне вперед, может быть осуществлено посредством увеличения оборотов хвостового двигателя и уменьшения оборотов передних. Для наклона назад — наоборот, необходимо увеличить обороты передних и уменьшить обороты заднего двигателя (соответствует рис. 2d);

4. Еще одной задачей движения коптера является разворот вокруг собственной оси. Для выполнения этой задачи достаточно изменить угол поворота хвостового двигателя, не изменяя при этом обороты боковых двигателей (левый, правый) (соответствует рис. 2e).

Указанные задачи являются простыми, но достаточными для полноценного управления летательным аппаратом. Существуют конечно и комбинированные движения, но рассмотрение подобных движений выходит за рамки настоящего исследования, поскольку их описание представляется довольно сложным.

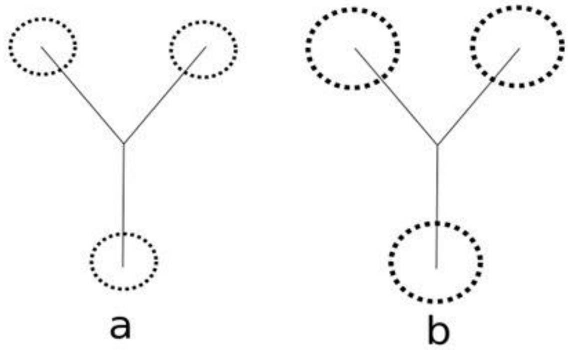

Рис. 2 a) Исходное положение трикоптера; b) схема подключение двигателей для подъема и спуска.

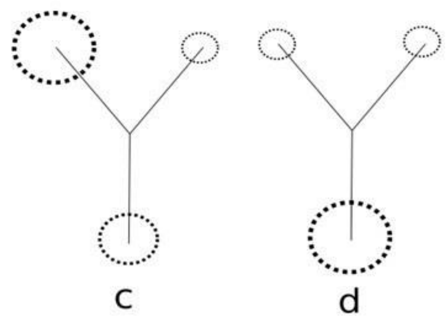

Рис. 2. c) схема подключения двигателей при изменении угла крена; d) схема подключения двигателей при изменении угла тангажа;

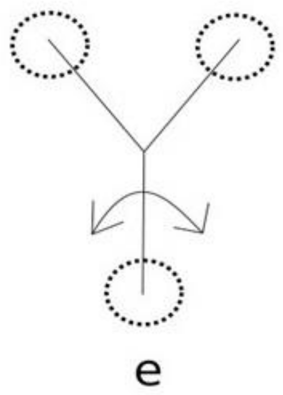

Рис. 2. е) схема подключения двигателей при изменении угла рыскания

Построение математической модели

Формирование математической модели будем проводить на основе известных законов физики, принимая в качестве допущений следующие положения относительно конструкции трикоптера:

1. рама трикоптера и его винты абсолютно жесткие;
2. каждый двигатель расположен на конце луча;
3. тяга, создаваемая передними винтами, перпендикулярна плоскости x-y;

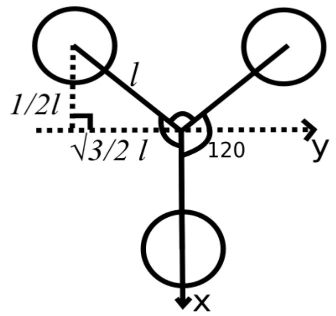

Рис. 3 Характеристики трикоптера

На рис. 3 приведена дополнительная иллюстрация, характеризующая конструкцию трикоптера, l – длина луча, соединяющего двигатель и центр аппарата.

Тяга, создаваемая каждым двигателем, задается как $F_i = \Omega_i^2 \cdot b$ где Ω_i – угловая скорость вала i -того двигателя, $i=1,2,3$, причем третий двигатель может менять свой угол наклона относительно оси e2, $b>0$ – коэффициент тяги.

Ориентация БПЛА в пространстве определяется углами: крена φ, тангажа θ и рысканья ψ .

Движение трикоптера в связанной системе координат

Запишем ускорения поворотов $\ddot{\phi}, \ddot{\theta}, \ddot{\psi}$ вокруг осей e1, e2, e3, которые соответствуют стратегии управления, рассмотренной ранее:

$$\ddot{\phi} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} l (F_2 - F_1)}{I_1} = \frac{\sqrt{3} l (F_2 - F_1)}{2 I_1} \tag{1}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\frac{1}{2}(l(F_1 + F_2) - l F_3)}{I_2} = \frac{l(F_1 + F_2) - l F_3}{2 I_2} \tag{2}$$

$$\ddot{\psi} = \rho \frac{l(F_1 - F_2 - F_3 \sin(\gamma))}{I_3} \tag{3}$$

где γ – угол отклонения заднего двигателя относительно горизонта, $I_i, i=1,2,3$ – моменты инерции для соответствующих осей, ρ – коэффициент масштабирования, соответствующий модели.

Переход от связанной системы координат к инерционной

Связь между системами отсчета осуществляется с помощью матрицы поворота M, которая получается перемножением матриц поворота относительно осей e1,e2,e3.

Поворот относительно оси e1:

$$M_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi)\\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi)\end{pmatrix}.$$

Поворот относительно оси e2:

$$M_2=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta)\\ 0 & 1 & 0\\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta)\end{pmatrix}.$$

Поворот относительно оси e3:

$$M_3=\begin{pmatrix}\cos(\psi) & \sin(\psi) & 0\\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Итоговая матрица перехода

$$M=M_1\cdot M_2\cdot M_3=$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(\theta)\cos(\psi) & \cos(\theta)\sin(\psi) & -\sin(\theta)\\ \cos(\psi)\sin(\phi)\sin(\theta)-\cos(\phi)\sin(\psi) & \cos(\phi)\cos(\psi)+\sin(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) & \cos(\theta)\sin(\phi)\\ \cos(\phi)\cos(\psi)\sin(\theta)+\sin(\phi)\sin(\psi) & \cos(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi)-\cos(\psi)\sin(\phi) & \cos(\phi)\cos(\theta)\end{pmatrix}$$

Движение трикоптера в инерциальной системе отсчета

Согласно второму закону Ньютона движение трикоптера в инерциальной системе отсчета можно записать в виде (4):

$$m\ddot{\xi}=(F_1+F_2+F_3\cos(\gamma))M\,E_z-\begin{bmatrix}0\\0\\g(z)\end{bmatrix} \tag{4}$$

где $E_z=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$, $g(z)$ – воздействие земли, предполагается неизвестным, $\xi=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ – положение центра масс трикоптера в инерциальной системе отсчета.

Введем управляющие переменные: u_0 – результирующая тяга, u_1 – управление креном, u_2 – управление тангажом, u_3 – управление рысканием. Указанные переменные также будут использоваться в качестве входных взаимодействий:

$$\begin{gathered}u_0=\frac{(F_1+F_2+F_3\cos(\gamma))}{m}\\ u_1=\frac{(F_2-F_1)}{I_1}\\ u_2=\frac{(F_1+F_2-F_3)}{I_2}\\ u_3=\rho\frac{(F_1-F_2-F_3\sin(\gamma))}{I_3}\end{gathered} \tag{5}$$

Исходя из соотношений (1) – (5) можно записать итоговую математическую модель трикоптера как управляемого объекта с шестью степенями свободы, которая представляется системой обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений 12-го порядка следующего вида:

$$\begin{gathered}\ddot{x}=u_0(\cos(\phi)\cos(\psi)\sin(\theta)+\sin(\phi)\sin(\psi))\\ \ddot{y}=u_0(\cos(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi)-\cos(\psi)\sin(\phi))\\ \ddot{z}=u_0(\cos(\phi)\cos(\theta)-g(z))\\ \ddot{\phi}=u_1\frac{\sqrt{3}}{2}l\\ \ddot{\theta}=u_2\frac{1}{2}l\\ \ddot{\psi}=u_3 l\end{gathered} \tag{6}$$

Полученная система не является полноприводной, то есть количество управляющих переменных меньше, чем управляемых переменных, возможность влиять на координаты x и y непосредственно отсутствует. Управление координатами объекта в данной модели будет обеспечено в процессе синтеза системы управления.

Результаты

Результатом данной работы является разработанная математическая модель физического объекта, которую можно использовать для анализа динамики объекта рассматриваемого типа, оптимизации параметров объекта при его конструировании, а также, впоследствии, для синтеза системы управления.

Заключение

В процессе работы была создана математическая модель БПЛА вида трикоптер, в тексте данной статьи собрана необходимая информация для построения математических моделей других подобных БПЛА.

Работа над проектом продолжается. На данный момент ведется разработка стабилизирующего регулятора для управления динамикой трикоптера. В дальнейшем будет построен действующий прототип исследуемого БПЛА, который сможет выполнять все поставленные перед ним задачи, в том числе такими задачами могут быть аэросъемка, исследование территории, перехват других дронов

Литература

1. Бабаджанянц Л.К., Пупышев Ю.А., Пупышева Ю.Ю. Классическая механика. Учебное пособие. Издание третье, 2013г, исправленное 259с.
2. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. 2005г.

References

1. Babadzhanjanc L.K., Pupyshev Ju.A., Pupysheva Ju.Ju. Klassicheskaja mehanika. Uchebnoe posobie. Izdanie tret'e, 2013, ispravlennoe 259s.
2. Samarskij A.A., Mihajlov A.P. Matematicheskoe modelirovanie: Idei. Metody. Primery. 2005.

Об авторах:

Тихонов Николай Олегович, студент, кафедра Компьютерных технологий и систем, Санкт-Петербургский государственный университет, akalji@ya.ru

Лепихин Тимур Андреевич, кандидат физико-математических наук, главный специалист, Санкт-Петербургский государственный университет, t.lepihin@spbu.ru

Жабко Наталия Алексеевна, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра компьютерных технологий и систем, Санкт-Петербургский государственный университет, n.zhabko@spbu.ru

Note of the authors:

Tikhonov Nikolai O., student, Department of Computer Applications and Systems, Saint-Petersburg State University, akalji@ya.ru

Lepikhin Timur A., Candidate of Physics-Mathematical Sciences, Chief Specialist, Saint-Petersburg State University, t.lepihin@spbu.ru

Zhabko Nataliia A., Candidate of Physics-Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Computer Applications and Systems, Saint-Petersburg State University, n.zhabko@spbu.ru