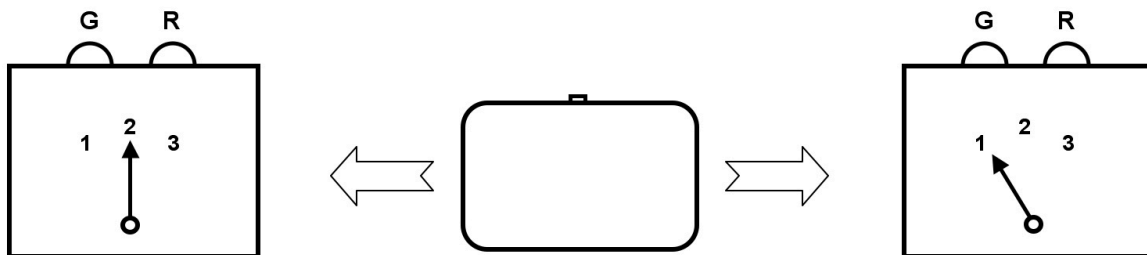


# EPR-Experimente, verborgene Parameter und Bell'sche Ungleichungen

Hanspeter Seipp  
Physik-Arbeitstage am Goetheanum, 26.2.-1.3.14

## N.D.Mermin's Gedankenexperiment [5]



### Die Quelle

sendet bei jedem "Klick" ein Signal aus.

### Der Detektor

besitzt einen Schalter mit drei möglichen Stellungen und ein grünes und ein rotes Lämpchen.

Bei jedem "Klick" der Quelle leuchtet ein Lämpchen auf.

An jedem einzelnen Detektor beobachtet man eine Zufallsfolge G,R,R,G,G,R,..... mit durchschnittlich 50% G und 50% R. Es ist nicht ersichtlich, wo die Zufälligkeit liegt: In der Quelle oder im Detektor? Und bei Betrachtung eines einzelnen Detektors scheint die Schalterstellung ohne Bedeutung zu sein.

### Beobachtung beider Detektoren mit gleichen Schalterstellungen: 11, 22, 33.

Es ist eine strikte Korrelation zu beobachten; die Anzeige beider Detektoren ist stets gleich: GG oder RR, je mit ca. 50% relativer Häufigkeit.

Folgerung: Die Detektoren können nicht zufällig reagieren. Die Zufälligkeit liegt in der Quelle und die Anzeige der Detektoren muss durch das von der Quelle ausgesendete Signal vorbestimmt sein.

Diese Schlussfolgerung setzt voraus, dass der Registriervorgang des einen Detektors nicht durch den anderen Detektor beeinflusst wird. (*Lokalität*).

### Beide Detektoren mit verschiedenen Schalterstellungen: 12, 21, 13, 31, 23, 32

Jetzt sind die Ereignisse GG, RR, GR, RG zu beobachten und es ist nun klar, dass die Schalterstellungen von Bedeutung sind.

Zu beobachtende Ereignisse: 11GG, 13GR, 21RR, .....

13GR bedeutet beispielsweise: "Schalter am linken Detektor auf Stellung 1 und das grüne Lämpchen leuchtet auf / Schalter am rechten Detektor auf Stellung 3 und das rote Lämpchen leuchtet auf".

## Versuch einer Erklärung und eine Bell'sche Ungleichung

Aufgrund der zu beobachtenden strikten Korrelation bei gleichen Schalterstellungen und der vorausgesetzten Unabhängigkeit der Detektoren schliessen wir, dass das von der Quelle ausgehende Signal eine Information enthält, welche die Anzeige der Detektoren eindeutig bestimmt. Wenn der eine Detektor beispielsweise bei Schalterstellung 1 "rot" anzeigt, schliessen wir, dass der andere bei Schalterstellung 1 ebenfalls "rot" anzeigen würde, auch wenn sich der Schalter in einer anderen Position befindet oder dieser Detektor gar nicht vorhanden wäre.

Wir postulieren dementsprechend 8 Typen von Signalen:  
GGR, GRG, RGG, RRG, RGR, GRR, GGG, RRR

Ein GGR-Signal beispielsweise löst an einem Detektor bei Stellung 1 des Schalters "grün", bei Stellung 2 "grün" und bei Stellung 3 "rot" aus; kurz: "grün-grün-rot".

Das Ereignis 13GR würde durch ein Signal ausgelöst, welches bei Schalterstellung 1 "grün" und bei Schalterstellung 3 "rot" zur Folge hat. Wir wissen allerdings nicht, welche Anzeige dieses Signal bei Schalterstellung 2 bewirken würde, aber es muss entweder "grün" oder "rot" sein, d.h. es muss sich um ein GGR oder GRR Signal handeln.

Wir betrachten die Ereignisse 13GR, 12GR, 23GR

13GR wird ausgelöst durch ein GGR oder GRR Signal,  
12GR wird ausgelöst durch ein GRG oder GRR Signal,  
23GR wird ausgelöst durch ein GGR oder RGR Signal.

Mit  $n(\text{GGR})$ ,  $n(\text{GRR})$  usw. sei die Anzahl der betreffenden Signale bezeichnet, welche die Quelle in einer Beobachtungsreihe aussendet und es gilt:

$$n(\text{GGR}) + n(\text{GRR}) \leq n(\text{GRG}) + n(\text{GRR}) + n(\text{GGR}) + n(\text{RGR})$$

Damit ergibt sich für die relativen Häufigkeiten der Ereignisse in der Beobachtungsreihe bzw. für deren Wahrscheinlichkeiten\* folgende Ungleichung [3]

<b>P(13GR)</b>	<b>≤</b>	<b>P(12GR)</b>	<b>+</b>	<b>P(23GR)</b>
----------------	----------	----------------	----------	----------------

\*) Es handelt sich um die bedingten Wahrscheinlichkeiten  $P(\text{GR}|13)$ ,  $P(\text{GR}|12)$  usw.

## Der bisher verschwiegene Inhalt der Experimentiergeräte und die Voraussagen der Quantenmechanik

Die Versuchsanordnung entspricht der von D.Bohm vorgeschlagenen Variante des EPR-Gedankenexperimentes [1]. Die Quelle sendet bei jedem "Klick" ein Paar Spin-1/2-Teilchen (z.B. Elektronen oder Protonen) mit Gesamtspin null in entgegengesetzte Richtungen aus.

Die Detektoren enthalten drehbare Stern-Gerlach-Magnete.

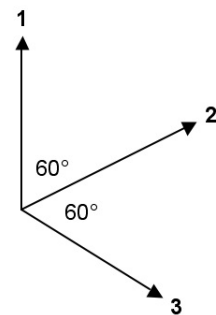
Beim linken Detektor leuchtet beim Messwert +1/2 das grüne und beim Messwert -1/2 das rote Lämpchen.

Beim rechten Detektor ist es umgekehrt: Er zeigt beim Messwert +1/2 "rot" und beim Messwert -1/2 "grün" an.

Die drei Schalterstellungen entsprechen drei Richtungen, in denen die Spinkomponente senkrecht zur Flugrichtung der Teilchen gemessen wird.

Zwischen den Stellungen 1 und 2 bzw. 2 und 3 beträgt der Winkel 60°.

Zwischen den Stellungen 1 und 3 beträgt er 120°.



Die QM ergibt für die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse (s.Anhang):

	GG = + -	RR = - +	GR = + +	RG = - -
11, 22, 33	1 / 2	1 / 2	0	0
12, 21, 23, 32	3 / 8	3 / 8	1 / 8	1 / 8
13, 31	1 / 8	1 / 8	3 / 8	3 / 8

Obige Ungleichung ist nicht erfüllt: 
$$\frac{P(13GR)}{3/8} \leq \frac{P(12GR)}{1/8} + \frac{P(23GR)}{1/8}$$

Auch die erste von Bell in [2] bewiesene Ungleichung für die Korrelationskoeffizienten E ist nicht erfüllt. (Zur Definition von E siehe Anhang; für den Beweis dieser Ungleichung siehe auch [6])

$$| E(12) - E(13) | \leq 1 + E(23)$$

$$| -1/2 - (+1/2) | > 1 + (-1/2)$$

*Die zur Herleitung der Ungleichungen getroffenen Annahmen führen zu einem Widerspruch mit der Quantenmechanik!*

## Mermin's Bell-Ungleichung [5]

- Die Schalterstellungen an beiden Detektoren werden zufällig variiert.
- Alle 9 Schalterkombinationen gleich wahrscheinlich.
- Es gibt darunter 3 gleiche (11, 22, 33) und 6 verschiedene (12, 21, 13, 31, 23, 32)
- Mögliche Beobachtungsreihe 12RG, 32GG, 31GR, 11RG, ....

Beweis einer Ungleichung:

Die 8 Signale können in zwei Klassen eingeteilt werden:

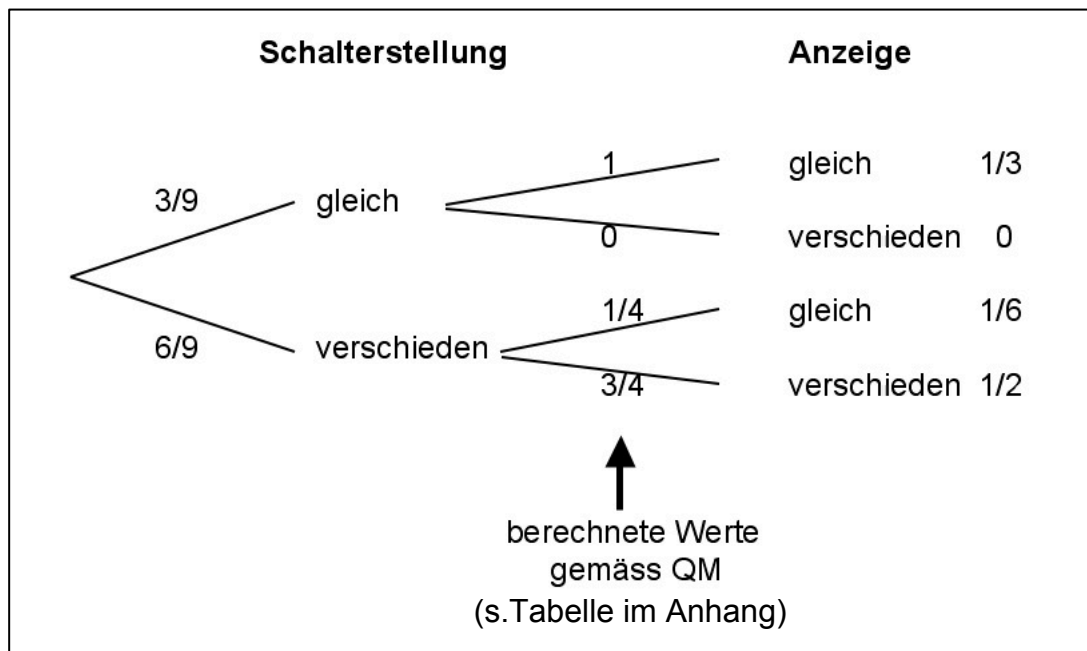
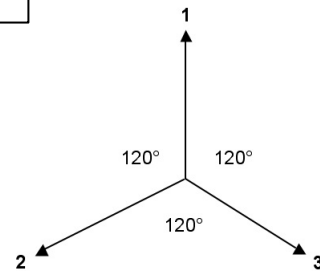
2 reine (GGG, RRR)

6 gemischte (GGR, GRG, RGG, GRR, RGR, RRG)

- Jedes reine Signal ergibt bei allen Schalterkombinationen gleiche Anzeige an den beiden Detektoren.
- Jedes gemischte Signal ergibt bei 5 von den 9 Schalterkombinationen gleiche Anzeige. Gäbe es nur gemischte Signale, müssten also in einer Beobachtungsreihe gleiche Anzeigen mit Wahrscheinlichkeit  $5/9$  auftreten.
- Da gegebenenfalls noch gleiche Anzeigen als Folge von reinen Signalen dazukommen (sofern es solche überhaupt gibt), gilt:

Wahrscheinlichkeit für gleiche Anzeige  $\geq 5/9$

Vergleich mit den Voraussagen der QM  
im Falle der abgebildeten Winkel zwischen  
den Analysatoren



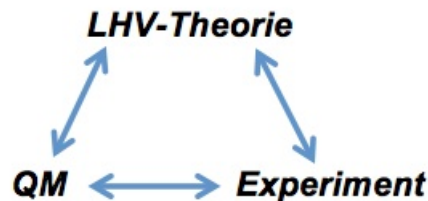
Die QM ergibt für die Wahrscheinlichkeit gleicher Anzeige  $1/3 + 1/6 = 1/2 < 5/9$ .  
Dieses Resultat kann nicht durch eine Theorie der obigen Art erklärt werden!

## LHV-Theorien (Local Hidden Variables)

Die postulierten Signale der Art GGR, GRR usw. entsprechen "verborgenen" Parametern ("hidden" or "supplementary" variables). Wenn angenommen wird, dass die Anzeige der Detektoren durch diese Parameter bestimmt (determiniert) wird, spricht man von einer *deterministischen* LHV-Theorie. Dies ist eine Idealisierung, denn reale Detektoren besitzen keine hundertprozentige Effizienz und registrieren nicht jedes von der Quelle ausgehende Signal.

*Lokal* nennt man eine solche Theorie, wenn vorausgesetzt wird, dass das Messresultat am einen Detektor nicht von der Einstellung und den physikalischen Prozessen im anderen Detektor abhängt.

Es stehen die Beziehungen zwischen drei Bereichen zur Diskussion:



Die perfekte Übereinstimmung quantenmechanischer Berechnungen mit den Experimenten steht heute nicht mehr zur Diskussion. Es geht nur um die Frage, ob eine LHV-Theorie mit der Quantenmechanik bzw. mit den experimentellen Tatsachen verträglich ist.

Bei den beschriebenen Experimenten handelt es sich wegen der erwähnten Annahme idealer Detektoren mit hundertprozentiger Effizienz um *Gedankenexperimente*. Es werden gewisse Konsequenzen einer LHV-Theorie mit den *theoretischen* Voraussetzungen der Quantenmechanik verglichen. Die Nichterfüllung der Bell'schen Ungleichungen bedeutet, dass eine solche LHV-Theorie im Widerspruch zur QM steht.

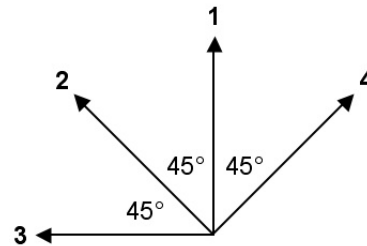
Es können Ungleichungen unter allgemeineren Voraussetzungen bewiesen werden, die sich für experimentelle Tests eignen. Ein verborgener Parameter  $\lambda$  bestimmt nicht die Messergebnisse, sondern nur die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die Detektoren den Messwert  $+1/2$  oder  $-1/2$  für den Spin anzeigen und ein Detektor kann mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit auch kein Signal registrieren. (*Stochastische* LHV-Theorie.  $\lambda$  kann auch eine Menge verschiedener Parameter bedeuten.)

Von zentraler Bedeutung ist aber wieder die Lokalitäts-Bedingung: Das Messergebnis am einen Detektor (bzw. dessen Wahrscheinlichkeit) ist von  $\lambda$  und von der Einstellung des Analysators, aber nicht von der Einstellung des anderen Detektors abhängig .

Unter diesen Voraussetzungen gilt für die Korrelationskoeffizienten die folgende Bell'sche Ungleichung (auch CHSH-Ungleichung genannt, nach Clauser, Horne, Shimony, Holt) [3],[6]:

$$| E(12) + E(14) + E(32) - E(34) | \leq 2$$

Für den experimentellen Test müssen Messungen mit vier verschiedenen Detektoreinstellungen durchgeführt werden:



Wie die Tabelle der Korrelationskoeffizienten im Anhang zeigt, wird die Ungleichung durch die quantenmechanisch berechneten Werte verletzt. Aber auch die experimentell gemessenen Werte erfüllen die Ungleichung nicht und sprechen somit gegen die LHV-Theorie.

Entsprechende Experimente wurden mit Photonen anstelle von Spin-1/2-Teilchen durchgeführt (z.B. von A.Aspect und seiner Gruppe). Die Bell'schen Ungleichungen gelten jedoch in unveränderter Form. Lediglich die quantenmechanischen Berechnungen sind etwas verschieden und die Messungen werden bei vier Analysatoreinstellungen ausgeführt, die sich um 22.5° unterscheiden.

## Kommentar

*Die Nichterfüllung der Bell'schen Ungleichungen bedeutet, dass die relativen Häufigkeiten (bzw. Wahrscheinlichkeiten), mit denen die Messwerte in einer Messreihe eines EPR-Experimentes mit Spin-1/2-Teilchen bzw. Photonen auftreten, nicht mit einer lokalen Theorie erklärt werden können, welche zusätzliche, in der Quantenmechanik nicht vorkommende Parameter enthält und die alle Messergebnisse, die bloss für den Beobachter unbekannt sein sollen, an sich festlegt.*

Eine solche Theorie wäre eine "Vervollständigung" der Quantenmechanik. Die Frage, ob die QM die physikalische Realität vollständig beschreibe oder nicht, wurde von Einstein verschiedentlich aufgeworfen (z.B. in [1]).

Der Umstand, dass beim EPR-Experiment bei gleich eingestellten Analysatoren an beiden Detektoren eine strikte Korrelation\* zu beobachten ist, verunmöglicht die Vorstellung, dass der Messvorgang eine "unkontrollierbare Störung" des Systems bedeutet. Ergibt der eine Detektor den Messwert  $+1/2$ , so können wir sofort sagen, dass der Messwert am anderen Detektor  $-1/2$  sein muss. Der zweite Detektor wird dazu gar nicht benötigt. Mit dieser Versuchsanordnung kann also durch eine Messung am einen Teilchen eine indirekte Messung am zweiten Teilchen vorgenommen werden, obwohl zwischen den Teilchen keine physikalische Wechselwirkung mehr besteht. Gemäss Einstein registriert das Messgerät somit eine *reale* Eigenschaft des Teilchens, die auch ohne Messung vorliegt ("an element of reality", vgl. [1]). Das Messergebnis wird nicht durch den Messvorgang erst erzeugt.

Die Bell'schen Ungleichungen gelten nur für Experimente, bei denen der Spin oder die Polarisation von Teilchen gemessen wird. Der merkwürdige Sachverhalt, der aufgedeckt wird, betrifft aber Quantensysteme im allgemeinen und widerspiegelt sich in der Art, wie in der Quantenmechanik Teilsysteme zu einem Gesamtsystem vereinigt werden. Die Situation wird von verschiedenen Autoren unterschiedlich beurteilt, je nach metaphysischem Standpunkt. Die speziellen statistischen Korrelationen werden als *EPR-Korrelationen* bezeichnet und die besonderen Eigenschaften von Quantensystemen, die der klassischen Physik fremd sind, mit Begriffen wie *Nichtlokalität*, *Nichtseparabilität*, *Holismus*, *Verschränkung (entanglement)*, *non-divisibility by thought*, usw. benannt. Nimmt man allerdings den Umstand ernst, dass ein Quantensystem nicht als aus Teilen zusammengesetzt *gedacht* werden darf, so darf man von Beginn an gar nicht von "Teilchen" reden und einige dieser Begriffe verlieren ihre besondere Bedeutung.

Gibt man die Lokalitätsbedingung auf, so ist eine "realistische" und deterministische Theorie mit verborgenen Parametern möglich, welche die quantenmechanischen Resultate reproduziert. Eine solche wurde von D.Bohm entwickelt.

\*) Es handelt sich genau genommen um eine Antikorrelation; die Messungen ergeben stets *entgegengesetzte* Werte für die Spinkomponenten.

## Anhang

### Quantenmechanisch berechnete Paarwahrscheinlichkeiten und Korrelationskoeffizienten beim Spin-1/2-EPR-Experiment:

$\theta$  : Winkel zwischen den beiden Detektoreinstellungen

$$P_{++}(\theta) = P_{--}(\theta) = \frac{1}{4}(1 - \cos\theta) = \frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$P_{+-}(\theta) = P_{-+}(\theta) = \frac{1}{4}(1 + \cos\theta) = \frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Korrelationskoeffizient:

$$E(\theta) = P_{++}(\theta) + P_{--}(\theta) - P_{+-}(\theta) - P_{-+}(\theta) = -\cos\theta$$

$\theta$		0°	45°	60°	90°	120°	135°	180°
P ++	P(GR)	0	0.073	1 / 8	1 / 4	3 / 8	0.427	1 / 2
P --	P(RG)	0	0.073	1 / 8	1 / 4	3 / 8	0.427	1 / 2
P +-	P(GG)	1 / 2	0.427	3 / 8	1 / 4	1 / 8	0.073	0
P -+	P(RR)	1 / 2	0.427	3 / 8	1 / 4	1 / 8	0.073	0
E		- 1	- 0.707	- 0.5	0	0.5	0.707	1



## Literatur

[1] A.Einstein, B.Podolsky, N.Rosen: Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935)

In diesem Artikel wird das "EPR-Paradoxon" am Beispiel der Orts- und Impulsmessung untersucht. Es handelt sich dabei um Observable mit kontinuierlichen Messwerten. Dafür lassen sich keine Bell'schen Ungleichungen beweisen. D.Bohm hat die EPR-Situation auf Spin-1/2-Teilchen übertragen. Praktisch alle weiteren Publikationen zu diesem Thema beziehen sich auf diesen analogen Fall, insbesondere auch die experimentellen Tests.

[2] J.S.Bell: On the Einstein Podolsky Rosen Paradox. *Physics* **1**, 195 (1964)

[3] J.S.Bell: Bertlmann's Socks and the Nature of Reality. (CERN 1980)  
*Journal de Physique (Paris)* **42**, C2 (1981)

Im Internet zu finden unter:

<http://cds.cern.ch/record/142461/files/198009299.pdf>

oder

<http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/22/06/88/PDF/ajp-jphyscol198142C202.pdf>

[4] B.D'Espagnat: The Quantum Theory and Reality. *Scientific American* **241**, 128 (November 1979).

[5] N.D.Mermin: Is the moon there when nobody looks? Reality and the quantum theory. *Physics Today*, April 1985, p.38.

Im Internet zu finden unter:

[http://cp3.irmp.ucl.ac.be/~maltoni/PHY1222/mermin\\_moon.pdf](http://cp3.irmp.ucl.ac.be/~maltoni/PHY1222/mermin_moon.pdf)

[6] H.P.Seipp: EPR-Paradoxon und Bell-Ungleichungen. Manuskript zu einem Seminar am Institut für theoretische Physik an der Universität Zürich, 1985.