

## EPR-PARADOXON UND BELL-UNGLEICHUNGEN

Die Phänomene, auf die hier hingewiesen werden soll, sind fundamental für die Interpretation der Quantenmechanik, und für die Frage: Wie hat man sich die quantenmechanischen Objekte (Teilchen) vorzustellen?

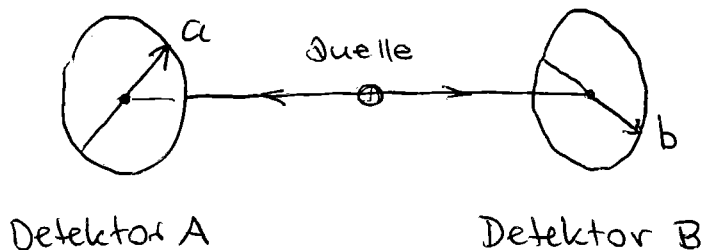
Der Artikel "Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?" von Einstein, Podolsky und Rosen [1] hat eine Kontroverse ausgelöst, die bis heute andauert, und zu diesem Thema existieren inzwischen tausende von Publikationen. Ausschlaggebend war Einsteins Ansicht, dass die QM eine vorläufige Theorie sei, welche die physikalische Realität nur unvollständig beschreibt, und welche durch eine Theorie ersetzt werden wird, die alle nötigen (im Rahmen der QM "verborgenen") Parameter enthält, um ein Quantensystem vollständig zu charakterisieren. "Vollständig" heisst dabei, dass auch für nicht-kommutierende Observable die Messwerte durch die Theorie vorausgesagt werden, und nicht bloss statistische Aussagen darüber gemacht werden.

In der Arbeit von EPR wurden die Überlegungen anhand von Orts- und Impulsmessungen an einem 2-Teilchensystem angestellt. D. Bohm hat ein äquivalentes Gedankenexperiment vorgeschlagen, welches unbeschränkte Observable mit kontinuierlichen Messwerten vermeidet, und welches die Grundlage aller heutigen EPR-Experimente bildet.

## Das Gedankenexperiment von Bohm

Eine Quelle erzeuge Paare von Teilchen, die sich in entgegengesetzte Richtungen weg bewegen, bis sie schliesslich nicht mehr miteinander wechselwirken. Die Teilchen haben je den Spin  $\frac{1}{2}$ , der Totalspin jedes Paares sei 0. Mittels zweier Detektoren werden sie als Koinzidenzereignisse registriert, und mit Stern-Gerlach-Filtern die Spincomponenten längs zwei gewählten Richtungen gemessen.

Schematisch



a, b: eingestellte  
Filterrichtungen

Jeder Detektor liefert in jeder Einstellung nur zwei mögliche Messwerte: +1 (Spincomponente  $+\frac{1}{2}$ ), -1 (Spincomponente  $-\frac{1}{2}$ ). Eine Reihe von Koinzidenzmessungen mit den eingestellten Filterrichtungen a, b sieht also z.B. folgendermassen aus

$$A(a) = +1 \quad +1 \quad -1 \quad +1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad +1 \quad \dots$$

$$B(b) = +1 \quad -1 \quad +1 \quad +1 \quad -1 \quad +1 \quad +1 \quad +1 \quad \dots$$

Die Messresultate können also beschrieben werden durch zwei Zufallsvariable

$$A(a) = \pm 1, \quad B(b) = \pm 1$$

Mit den Mittelwerten

$$\langle A(a) \rangle = \langle B(b) \rangle = 0$$

$$\langle A(a)^2 \rangle = \langle B(b)^2 \rangle = 1$$

und der Streuung

$$\Delta(A(a)) = \Delta(B(b)) = 1.$$

Die QM ergibt für den Korrelationskoeffizienten

$$E(a,b) \equiv E(A(a), B(b)) = \frac{\langle A(a)B(b) \rangle - \langle A(a) \rangle \langle B(b) \rangle}{\Delta(A(a)) \Delta(B(b))}$$

$$= \langle A(a)B(b) \rangle = -\cos \Theta$$

$$\Theta = \angle(a,b).$$

Die folgende Tabelle zeigt die Werte von  $E(a,b)$  für einige ausgezeichnete Werte von  $\Theta$ . Ausserdem sind die Wahrscheinlichkeiten  $P(1,-1) \equiv P(A(a)=1, B(b)=-1)$ , etc. aufgeführt.

$\Theta$	$P(1,-1)$	$P(-1,1)$	$P(1,1)$	$P(-1,-1)$	$E(a,b)$
$0^\circ$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	-1
$45^\circ$	0.427	0.427	0.073	0.073	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$
$60^\circ$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}$
$90^\circ$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
$120^\circ$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$
$135^\circ$	0.073	0.073	0.427	0.427	$\sqrt{\frac{1}{2}}$
$180^\circ$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Für  $\theta = 90^\circ$  sind die beiden Zufallsvariable unabhängig.

Für  $\theta = 0^\circ$  bzw.  $\theta = 180^\circ$  liegt die EPR-Situation vor.

### Das Argument von EPR

Für gleich eingestellte Filter ( $a=b, \theta=0^\circ$ ) liegt gemäss der QM eine strikte Korrelation vor, d.h. für jedes Teilchenpaar zeigen die beiden Detektoren entgegengesetzte Messergebnisse. Es lässt sich zwar nicht voraussagen, welche Messwert-Konstellation eintreten wird ( $A=+1, B=-1$  oder  $A=-1, B=+1$ ), doch aus dem abgelesenen Wert von A lässt sich mit Sicherheit auf den Wert von B schliessen. Nimmt man nun an, dass weder die beiden Teilchen beim Durchgang durch die Filter miteinander wechselwirken, noch das Messergebnis bei A dasjenige bei B in irgend einer Weise "telepathisch" beeinflusst (Lokalitätsforderung), so kann also die Spinkomponente längs der Richtung  $a$  von Teilchen 2 (bei B) bestimmt werden durch eine Messung an Teilchen 1 (bei A), gewissermassen ohne Teilchen 2 zu "stören". Man kann dann Detektor B geadesogut weglassen, und aufgrund von  $A=+1$  (bzw.  $A=-1$ ) sagen: Teilchen 2 "hat" die Spinkomponente  $-\frac{1}{2}$  (bzw.  $+\frac{1}{2}$ ), unabhängig von einer Messung bei B. Der Wert der betreffenden Spinkomponente hat also "physikalische Realität", er wird nicht erst durch den Messvorgang erzeugt.

Nun kann die Filterrichtung  $a$  frei gewählt werden (stets bei gleich eingestellten Filtern:  $a=b$ ), z.B.  $a=x$  oder  $a=y$ . Es lässt sich somit die  $x$ -Komponente messen, oder auch die  $y$ -Komponente. Aufgrund obiger Überlegung wird man dann zum Schluss geführt, dass Teilchen 2 einen bestimmten Wert für die  $x$ -Komponente und für die  $y$ -Komponente haben muss. Dasselbe gilt für Teilchen 1, wenn man Messungen bei  $B$  betrachtet.

Die QM vermag bei bekannter  $x$ -Komponente nur statistische Voraussagen für die Messung der  $y$ -Komponente zu machen, sie ist also eine unvollständige Theorie.

Es kann hier nicht auf die möglichen Einwände gegen diese Argumentation eingegangen werden, doch die Frage bleibt: Gibt es eine Theorie, welche die Messresultate aller Spinkomponenten determiniert?

### Theorien mit verborgenen Parametern

Eine Theorie, wie sie Einstein vorgeschwebt haben mag, wird heute als deterministische LHV-Theorie ("local hidden-variables theory") bezeichnet. Eine solche soll Parameter enthalten, deren Kenntnis es ermöglicht, die Messwerte aller Observablen voranzusagen. Diese Parameter werden zusammenfassend mit  $\lambda$  bezeichnet, was eine Zahl, ein Vektor, eine Funktion, eine Menge von Funktionen, etc. bedeuten kann. Durch Mittelung über  $\lambda$  soll sich die QM mit ihren statistischen Aus-

sagen aus der LHV-Theorie wiedergewinnen lassen. Eine LHV-Theorie stellt also zur QM in einem ähnlichen Verhältnis, wie etwa die statistische Mechanik zur Thermodynamik.

Nun lässt sich zeigen, dass eine deterministische LHV-Theorie, auch unter sehr allgemeinen Voraussetzungen, die quantenmechanischen Spinkorrelationen  $E(a,b) = -\cos\theta$  nicht reproduzieren kann, und zwar anhand gewisser (erstmals von J.S. Bell gefundenen) Ungleichungen, die für die LHV-Theorie gelten, jedoch in der QM nicht erfüllt sind. Eine deterministische LHV-Theorie steht also im Widerspruch zur QM.

Die strikte Korrelation bei gleich eingestellten Filtern erfordert eine deterministische LHV-Theorie. Da erstere aber in den durchführbaren Experimenten aufgrund von Imperfektionen der Messanordnung nicht streng nachweisbar ist, kann man versuchen, die strenge Forderung des Determinismus fallenzulassen, und LHV-Theorien betrachten, die noch Raum für zufällige Effekte lässt. Doch auch für eine solche "stochastische" LHV-Theorie lässt sich eine Bell-Ungleichung beweisen, die im Widerspruch zur QM steht.

## Deterministische LHV-Theorie

Parameter  $\lambda \in \Lambda$  mit Verteilung  $\rho(\lambda)$

$$\int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) = 1.$$

Es wird angenommen, dass zu jedem Koinzidenz-Ereignis ein (unbeobachtbarer)  $\lambda$ -Wert gehört, der die Messresultate an beiden Detektoren bestimmt:

$$\begin{aligned} A(a, \lambda) &= \pm 1 \\ B(b, \lambda) &= \pm 1 \end{aligned} \quad \text{je nach dem Wert von } \lambda.$$

$a, b$ : kontrollierbare Detektorparameter (Filterrichtung).

Lokalität: Das Messresultat bei A hängt nicht von  $b$  ab, das Messresultat bei B hängt nicht von  $a$  ab.

Beobachtete Mittelwerte

$$\langle A(a) \rangle = \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) A(a, \lambda)$$

$$\langle B(b) \rangle = \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) B(b, \lambda)$$

$$\langle A(a)B(b) \rangle = \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) A(a, \lambda) B(b, \lambda).$$

Verlangt man in anbahnung an die QM

$$\langle A(a) \rangle = \langle B(b) \rangle = 0,$$

so gilt

$$E(a, b) = \langle A(a)B(b) \rangle.$$

Eine erste Bell-Ungleichung erhält man durch die Forderung der strikten Korrelation bei gleich ein-

gestellten Filtern

$$A(a, \lambda) = -B(a, \lambda), \quad \forall a, \forall \lambda$$

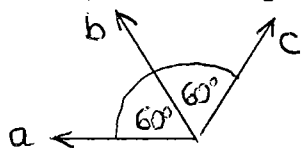
d.h.  $E(a, a) = -1$ .

Betrachte die vier Detektoreinstellungen  $A(a), A(b), B(b), B(c)$ .

$$\begin{aligned} |\langle A(a)B(b) \rangle - \langle A(a)B(c) \rangle| &= |\langle A(a)A(b) \rangle + \langle A(a)B(c) \rangle| \\ &= |\langle A(a)A(b) + A(a)B(c) \rangle| \\ &= |\langle A(a)A(b) + A(a)A(b)A(b)B(c) \rangle| \\ &= |\langle A(a)A(b) (1 + A(b)B(c)) \rangle| \\ &\leq \langle |A(a)A(b) (1 + A(b)B(c))| \rangle \\ &= \langle |1 + A(b)B(c)| \rangle \\ &= \langle 1 + A(b)B(c) \rangle \\ &= 1 + \langle A(b)B(c) \rangle \end{aligned}$$

also  $|E(a, b) - E(a, c)| \leq 1 + E(b, c)$

Die quantenmechanischen Korrelationen  $E(a, b) = -\cos \theta$  erfüllen für die folgenden Detektoreinstellungen diese Bell-Ungleichung nicht:



$$E(a, b) = E(b, c) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$E(a, c) = -\cos 120^\circ = \frac{1}{2}$$

$$|E(a, b) - E(a, c)| = 1, \quad 1 + E(b, c) = \frac{1}{2}$$



Lässt man die Forderung der strikten Korrelation fallen, so lässt sich eine zweite, allgemeinere Bell-Ungleichung beweisen.

Betrachte die vier Detektoreinstellungen  $A(a), A(a'), B(b), B(b')$ .

Es gilt immer

$$|A(a, \lambda) (B(b, \lambda) + B(b', \lambda)) + A(a', \lambda) (B(b, \lambda) - B(b', \lambda))| = 2.$$

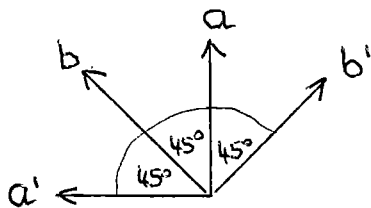
Damit erhält man

$$\begin{aligned} & | \langle A(a)B(b) \rangle + \langle A(a)B(b') \rangle + \langle A(a')B(b) \rangle - \langle A(a')B(b') \rangle | \\ &= | \langle A(a)B(b) + A(a)B(b') + A(a')B(b) - A(a')B(b') \rangle | \\ &= | \langle A(a) (B(b) + B(b')) + A(a') (B(b) - B(b')) \rangle | \\ &\leq \langle |A(a) (B(b) + B(b')) + A(a') (B(b) - B(b'))| \rangle = 2, \end{aligned}$$

und somit

$$\boxed{|E(a, b) + E(a, b') + E(a', b) - E(a', b')| \leq 2}$$

Für die folgenden Detektoreinstellungen verletzen die quantenmechanischen Korrelationen auch diese Bell-Ungleichung:



$$E(a, b) = E(a, b') = E(a', b) = -\cos 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$E(a', b') = -\cos 135^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|E(a, b) + E(a, b') + E(a', b) - E(a', b')| = 4 \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

## Stochastische LHV-Theorie

Wie im Falle der deterministischen LHV-Theorie wird angenommen, dass jedes Koinzidenz-Ereignis durch einen verborgenen Parameter  $\lambda \in \Lambda$  mit normierter Verteilung  $\mathcal{G}(\lambda)$  charakterisiert ist. Ein gegebenes  $\lambda$  bestimmt aber nicht die Messresultate, sondern lediglich die Wahrscheinlichkeiten, mit denen an den beiden Detektoren die Messwerte  $+1$ , bzw.  $-1$  auftreten:

$$A(a, \lambda) = \begin{cases} +1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } w_A^+(a, \lambda) \\ -1 & \text{" " " " } w_A^-(a, \lambda) \end{cases}$$

$$B(b, \lambda) = \begin{cases} +1 & \text{" " " " } w_B^+(b, \lambda) \\ -1 & \text{" " " " } w_B^-(b, \lambda) \end{cases}$$

$$w_A^+(a, \lambda) + w_A^-(a, \lambda) = w_B^+(b, \lambda) + w_B^-(b, \lambda) = 1.$$

Lokalität:  $w_A^\pm$  hängt nicht von  $b$  ab,  
 $w_B^\pm$  hängt nicht von  $a$  ab.

Ein gegebenes  $\lambda$  bestimmt so die (experimentell nicht beobachtbaren) Mittelwerte  $\bar{A}(a, \lambda)$ ,  $\bar{B}(b, \lambda)$  über die Koinzidenz-Ereignisse, charakterisiert durch den festen Wert  $\lambda$ :

$$\bar{A}(a, \lambda) = w_A^+(a, \lambda) - w_A^-(a, \lambda)$$

$$\bar{B}(b, \lambda) = w_B^+(b, \lambda) - w_B^-(b, \lambda).$$

Es gilt

$$|\bar{A}(a, \lambda)| \leq 1, \quad |\bar{B}(b, \lambda)| \leq 1.$$

Da die Messresultate an den beiden Detektoren als unabhängig voneinander angenommen werden, gilt

$$\overline{A(a, \lambda) B(b, \lambda)} = \bar{A}(a, \lambda) \bar{B}(b, \lambda).$$

Somit erhält man durch Mittelung über alle  $\lambda$  die beobachtbaren totalen Mittelwerte

$$\langle \bar{A}(a) \rangle = \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) \bar{A}(a, \lambda)$$

$$\langle \bar{B}(b) \rangle = \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) \bar{B}(b, \lambda)$$

$$\langle \bar{A}(a) \bar{B}(b) \rangle = \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) \overline{A(a, \lambda) B(b, \lambda)} = \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) \bar{A}(a, \lambda) \bar{B}(b, \lambda).$$

Betrachte nun die vier Detektoreinstellungen  $A(a), A(a'), B(b), B(b')$ :

$$\begin{aligned} & | \langle \bar{A}(a') \bar{B}(b) \rangle - \langle \bar{A}(a') \bar{B}(b') \rangle | \\ &= | \langle \bar{A}(a') \bar{B}(b) (1 \pm \bar{A}(a) \bar{B}(b')) \rangle - \langle \bar{A}(a') \bar{B}(b') (1 \pm \bar{A}(a) \bar{B}(b)) \rangle | \\ &\leq \langle | \bar{A}(a') \bar{B}(b) (1 \pm \bar{A}(a) \bar{B}(b')) | \rangle + \langle | \bar{A}(a') \bar{B}(b') (1 \pm \bar{A}(a) \bar{B}(b)) | \rangle \\ &\leq \langle | 1 \pm \bar{A}(a) \bar{B}(b') | \rangle + \langle | 1 \pm \bar{A}(a) \bar{B}(b) | \rangle \\ &= \langle 1 \pm \bar{A}(a) \bar{B}(b') \rangle + \langle 1 \pm \bar{A}(a) \bar{B}(b) \rangle \\ &= 2 \pm (\langle \bar{A}(a) \bar{B}(b') \rangle + \langle \bar{A}(a) \bar{B}(b) \rangle). \end{aligned}$$

Diese Ungleichung hat die Form  $|X| \leq 2 \pm Y$ , wobei  $|X| \leq 2, |Y| \leq 2$ . Daraus folgt  $|X \pm Y| \leq 2$ .

Nimmt man wiederum an  $\langle \bar{A}(a) \rangle = \langle \bar{B}(b) \rangle = 0$ ,  
 $E(a, b) = \langle \bar{A}(a) \bar{B}(b) \rangle$ , so gilt also für die Korrelationen  
die zweite Bell-Ungleichung

$$|E(a, b) + E(a, b') + E(a', b) - E(a', b')| \leq 2$$

Es stellt somit auch eine stochastische LHV-Theorie im  
Widerspruch zur QM.

Die erste Bell-Ungleichung kann in einer stochastischen  
LHV-Theorie nicht bewiesen werden, da die strikte  
Korrelation bei gleich eingestellten Filtern nur in einer  
deterministischen Theorie möglich ist.

### Bemerkungen und Konsequenzen

1) Man hat 3 Dinge einander gegenüberzustellen

- Die QM
- LHV-Theorien
- Experimente

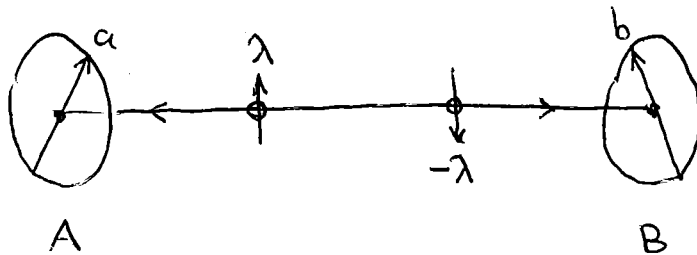
Die Bell-Ungleichungen zeigen, dass die LHV-Theorien  
in klarem Widerspruch stehen zu den theoretischen Vor-  
aussagen der QM.

Die experimentelle Situation war anfänglich nicht so  
klar. Das Gedankenexperiment von Bohm kann  
nicht in der beschriebenen, einfachen Form durchge-  
führt werden, doch die neueren Experimente mit

Photonen und Polarisationsfiltern anstelle von Stern-Gerlach-Filtern zeigen eine deutliche Verletzung der zweiten Bell-Ungleichung, und stehen im Einklang mit der QM. LHV-Theorien der hier beschriebenen Art können also als ausgeschlossen betrachtet werden.

2) Es besteht die Frage, ob LHV-Theorien unter noch allgemeineren Voraussetzungen denkbar wären. Dazu ist zu sagen, dass jedenfalls die folgende, naheliegende klassische Vorstellung die gemachten Voraussetzungen erfüllt:

Die beiden Teilchen sind klassische Teilchen, und der Spin ein klassischer Drehimpuls.  $\lambda$  bezeichnet die beiden (einander entgegengesetzten) Spinrichtungen.



Die diskreten Messwerte entstehen erst beim Messvorgang durch Wechselwirkung mit dem Detektor, sei es deterministisch (trifft das Teilchen auf den Detektor, so wird für gewisse Richtungen  $\lambda + 1$  registriert, und  $-1$  für andere Richtungen  $\lambda$ ), oder zufällig ( $+1$  oder  $-1$  wird mit einer gewissen, von  $a$  und  $\lambda$  abhängigen Wahrscheinlichkeit registriert). Eine solche Vorstellung ist aufgrund der gemachten Überlegungen ausgeschlossen.

3) Klassisches Analogon zum EPR-Experiment: Ein makroskopischer Körper sei anfänglich in Ruhe, und zerfalle in zwei Teile, die voneinander wegfliegen. Misst man eine Drehimpuls-Komponente des einen Teiles, so kann aufgrund der Drehimpulserhaltung auf die betreffende Komponente des anderen Teiles geschlossen werden. Nimmt man an, dass der Zerfallsprozess zufällig ist, d.h. die Richtungen der resultierenden Drehimpulse gleichverteilt sind, so erhält man für die Korrelation der Drehimpulskomponenten längs zwei Richtungen  $a, b$ , genau wie in der AM  $E(a, b) = -\cos\theta$  [2].

Diese klassische Situation erfüllt also die Bell-Ungleichungen nicht. Doch es handelt sich eben um eine klassische Situation, in welcher alle Messresultate bestimmt sind, und kontinuierliche Werte haben.

Aufgrund der Argumentation mit den Bell-Ungleichungen kann nicht geschlossen werden, dass es keine klassische Situation gibt, welche die Bell-Ungleichungen verletzt, sondern dass die quantenmechanische Situation im Bohm'schen Gedankenexperiment (mit Messwerten  $\pm 1$ ) nicht durch eine unterliegende klassische Theorie (wie etwa die unter 2 erwähnte) beschrieben werden kann. Die Bell-Ungleichungen beziehen sich ausschliesslich auf das Bohm'sche Experiment, bzw. auf das analoge Experiment mit Photonen, und brauchen für höhere Spins oder gar für die klassische Situation nicht zu gelten.

- 4) Auch ohne Ablehnung an die Bell-Ungleichungen stellt die Tatsache der strikten Korrelation bei gleich eingestellten Filtern im Widerspruch zur früher weit verbreiteten Vorstellung, dass die Zufälligkeiten bei der quantenmechanischen Messung ihren Grund in einer "unkontrollierbaren Störung" des Systems durch das Messinstrument haben. Stellt man sich die Messvorgänge an den beiden Teilchen unabhängig vor, so ist doch eine strikte Korrelation gar nicht denkbar, wenn die beiden Messvorgänge mit zufälligen Effekten verbunden wären.
- 5) Gibt man die Forderung der Lokalität (im hier gemeinten Sinne) auf, so können LHV-Theorien nicht ausgeschlossen werden. Man hat dann allerdings in der klassischen Physik unbekannte Fernwirkungseffekte zu akzeptieren.
- 6) Das EPR-Argument gilt für beliebige, nicht-kommutierende Observable, also z.B. auch für Ort und Impuls wie in [1]. Allerdings sind nur für die erwähnten Spinnmessungen Ungleichungen bekannt, die sich experimentell testen lassen.
- 7) Ein umfassender Übersichtsartikel über das Thema ist [3].

[1] Phys. Rev. 47(1935)777.

[2] Barut, Meystre: Phys. Lett. 105A (1984) 458.

[3] Clauser, Shimony: Rep. Prog. Phys. 41 (1978) 1881.