

Strahlenoptik und projektive Geometrie

Gerard Hermans

Zusammenfassung. Für Abbildungen durch Spiegel und Linsen existieren einfache mathematische Modelle, die die Wirklichkeit gut annähern. Im Kontext der projektiven Geometrie sind diese Modelle als zentrale Kollineationen bekannt. Das mathematische Modell für die elementare Lichtbrechung an der Oberfläche eines optisch dichteren Mediums stellt keine zentrale Kollineation dar. Mittels einer ‹modifizierenden› Hypothese wird ein Bezug zwischen der Lichtbrechung und zentralen Kollineationen hergestellt. Mit Hilfe der imaginären Geometrie werden weitere Hypothesen vorgestellt, um die Dispersion des Lichtes besser auf Basis der Goetheschen Farbenlehre zu verstehen.

Keywords. Projektive Geometrie, Lichtbrechung, Farbenlehre.

Spiegelung

Wir betrachten die Spiegelung von Lichtstrahlen (Abbildung 174) als projektive Abbildung (Abbildung 175), wobei in Abbildung 175 die unendlich ferne Gerade mit u angedeutet ist. Bei dieser Spiegelung werden die Geraden a und b in die Geraden a' und b' übergeführt. Die bezüglich der Spiegelungsabbildung invarianten Geraden, z.B. n und n' , stehen senkrecht zur Oberfläche m . Euklidisch gesehen gilt: Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel; vom projektiven Gesichtspunkt heisst das, dass die Geraden a, a' oder b, b' harmonisch in Bezug auf die Geraden m und n liegen.

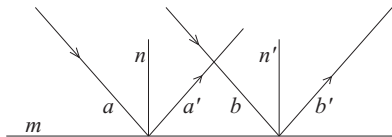


Abbildung 174: euklidische Spiegelung

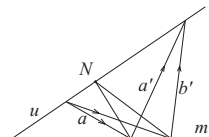


Abbildung 175: projektive Spiegelung

Weil wir im weiteren Verlauf des Artikels eine euklidische Definition für das Doppelverhältniss zwischen Geraden brauchen, wollen wir diesen Sachverhalt in Detail beschreiben. Wir definieren das Doppelverhältniss (DV) von vier Geraden in einem Strahlenbüschel an Hand des Doppelverhältnisses vierer Punkten auf eine Geraden, die nicht dem Büschel angehört. Siehe Abbildung 176. Es

gilt, weil alle Dreiecke OAB, OAC , usw. dieselbe Höhe haben

$$DV(abcd) := DV(ABCD) := \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{F_{\Delta(OAC)}}{F_{\Delta(OAD)}} : \frac{F_{\Delta(OBC)}}{F_{\Delta(OBD)}} = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OC} \cdot \sin \angle(a, c)}{\overline{OA} \cdot \overline{OD} \cdot \sin \angle(a, d)} : \frac{\overline{OB} \cdot \overline{OC} \cdot \sin \angle(b, c)}{\overline{OB} \cdot \overline{OD} \cdot \sin \angle(b, d)} = \frac{\sin \angle(a, c)}{\sin \angle(a, d)} : \frac{\sin \angle(b, c)}{\sin \angle(b, d)}. \quad (1)$$

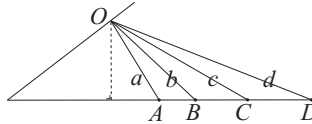


Abbildung 176: Zum Doppelverhältnis

Für den Fall, dass der Winkel $\angle(b, d) = 90^\circ$ und die Winkel $\angle(a, b)$ und $\angle(b, c)$ gleich gross sind, folgt mit Gleichung (1), dass das Doppelverhältnis

$$DV(abcd) = \frac{\sin(2 \cdot \angle(a, b))}{\sin(90^\circ + \angle(a, b))} : \frac{\sin \angle(a, b)}{1} = 2, \quad (2)$$

also harmonisch ist.¹

Zurückkommend auf die projektive Transformation in Abbildung 175 stellen wir fest, dass bei der Spiegelung alle Geraden durch den Punkt N , den unendlich fernen Punkt der Spiegelnormalen, sowie alle Punkte der Spiegelebene m invariant sind.

Eine projektive Abbildung mit Fixpunktebene und Fixebenenbündel nennt man eine \langle zentrale Kollineation \rangle . Zusätzlich kann man noch unterscheiden, ob Fixpunktebene und Fixebenenbündel inzidieren oder nicht. Für den bei einer Spiegelung vorliegenden Fall, dass die beiden Elemente nicht ineinanderliegen, spricht man auch von \langle Homologie \rangle , andernfalls von einer \langle Elation \rangle .

Die zentrale Kollineation oder Homologie, welche eine Spiegelung beschreibt, wird durch die Angabe von genau einer weiteren Bedingungen festgelegt und das ist eben die Bedingung $DV = -1$ (harmonische Lage).

Man sollte sich noch vergegenwärtigen, dass die projektive Abbildung zwischen den Geraden in Abbildung 174 und 175 mehrere Interpretationen für die Lichtstrahlen zulässt. Man kann zum Beispiel die Lichtstrahlen als von der anderen Seite des Spiegels herkommend betrachten. Man könnte sich den Strahlengang theoretisch auch so vorstellen, dass der Strahl a nach der \langle Spiegelung \rangle hinter dem Spiegel, entlang die Verlängerung von a' weiterläuft. Vom Gesichtspunkt der projektive Abbildung ist das möglich, physikalisch jedoch nicht.

¹Vier verschiedene Punkte (oder Geraden) bilden immer sechs, nicht notwendig alle verschiedene Doppelverhältnisse $\lambda, 1/\lambda, 1 - \lambda, 1/(1 - \lambda), (\lambda - 1)/\lambda, \lambda/(\lambda - 1)$. Für den Fall der harmonische Lage nehmen diese Doppelverhältnisse die Werte $-1, 2$ und $1/2$ an.

Linse

Auch die Abbildung einer idealen Linse ist eine projektive Transformation. Man vergleiche dazu die Abbildungen 177 und 178. Abbildung 177 zeigt das klassische Schulbeispiel der idealen Linse. Die horizontale Gerade ist die optische Achse der Linse mit dem Hauptbrennpunkt F . Die Ebene senkrecht zur optischen Achse durch F ist die Brennpunktebene, sie enthält auch die Nebenbrennpunkte wie z.B. F' . Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke OGG' und OBB' und der Dreiecke FOO' und FBB' folgt die Linsengleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}. \quad (3)$$

Die Regeln für die Konstruktion der Linsenabbildung lauten:

- Ein Lichtstrahl durch das Zentrum O der Linse (Hauptstrahl) geht ungebrochen weiter.
- Lichtstrahlen, die parallel zur optischen Achse verlaufen (Parallelstrahlen), werden im Brennpunkt F gebündelt.

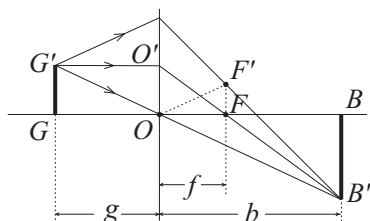


Abbildung 177: euklidische Linse

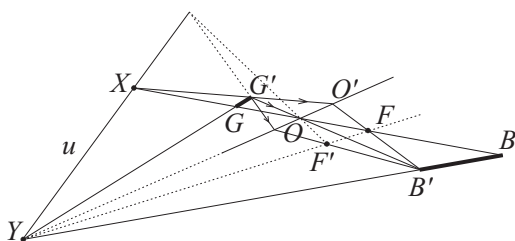


Abbildung 178: projektive Linse

Bei der idealen Linse treffen sich alle Lichtstrahlen, die von einem Punkt (G') ausgehen, wieder in einem Bildpunkt (B'). Der Beweis für diese Tatsache beruht auf verschiedenen ähnlichen Dreiecken in Abbildung 177 und auf der

Linsengleichung, ist aber etwas umständlich und kann hier weggelassen werden. Man kann auch zeigen, dass die Punkte einer beliebigen Geraden alle wieder auf die Bildgerade zu liegen kommen. Da also alle Inzidenzrelationen erhalten bleiben, ist die Abbildung durch die ideale Linse tatsächlich eine projektive Transformation. Siehe Abbildung 178, wo die Gerade u wieder die Rolle der unendlich fernen Gerade einnimmt.

Aus den Konstruktionsregeln geht hervor, um welche projektive Transformation es sich bei der Abbildung durch die ideale Linse handelt: Alle Geraden und Ebenen durch das Zentrum O der Linse bleiben fix. Die unendlich ferne Ebene – repräsentiert durch u in Abbildung 178 – wird auf die Brennpunktebene abgebildet. Der unendlich ferne Punkt X der optischen Achse geht dabei auf den Hauptbrennpunkt F über. Weiter sind alle Punkte in der Ebene OO' der Linse fix. Mit Hilfe der Linsengleichung (3) sieht man nämlich leicht, dass mit $g \rightarrow 0$ auch $b \approx -g \rightarrow 0$ läuft.

Wie bei der Spiegelung, hat man es auch im Fall der Linsenabbildung mit einer zentralen Kollineation zu tun. Da das Zentrum jedoch in der Fixpunktebene liegt, handelt es sich um eine Elation.

Man bezeichne jetzt mit H den in Bezug auf O und X harmonisch konjugierten Punkt von F . Euklidisch gesehen bedeutet das, dass die Strecken \overline{HO} und \overline{OF} gleich lang sind. Geraden durch den Punkt H (Fokalstrahlen) werden auf ein zur optischen Achse paralleles Strahlenbündel abgebildet. X ist also das Bild von H . Diese Tatsache ist innerhalb der euklidischen Situation (Abbildung 177) wohl bekannt, lässt sich aber entsprechend auch im projektiven Fall (Abbildung 178) konstruieren.

Die Punkte X, O, G, H der optischen Achse werden auf die Punkte F, O, B, X abgebildet. Das Doppelverhältniss bleibt dabei erhalten.

$$\begin{aligned} DV(XOGH) = DV(FOBX) &\iff \frac{\overline{XG}}{\overline{XH}} : \frac{\overline{OG}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{FB}}{\overline{FX}} : \frac{\overline{OB}}{\overline{OX}} \iff \frac{\overline{OH}}{\overline{OG}} = \frac{\overline{FB}}{\overline{OB}} \\ &\iff \frac{-f}{-g} = \frac{b-f}{b} \iff \frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}. \end{aligned}$$

Die klassische Linsenformel beruht also auf einem projektiven Gesetz.

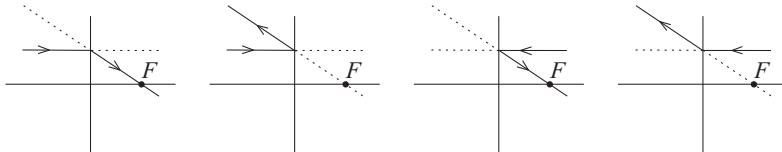


Abbildung 179: Varianten für den Strahlengang

Wir bemerken noch, dass die zentrale Kollineation mehrere Varianten für den Strahlengang in der Linse zulässt (Abbildung 179). Die verschiedenen Varianten aus Abbildung 179 repräsentieren die konvexe Linse, die konkave Linse,

den Wölbspiegel und den Hohlspiegel. Normalerweise spricht man davon, dass eine Linse *zwei* Brennpunkteebenen hat, je eine auf beiden Seiten. Die beiden zugehörigen projektiven Abbildungen sind zueinander invers.

Lichtbrechung

Das Licht vermittelt uns räumliche Vorstellungen der Welt; diese Vermittlung geschieht in Zusammenspiel mit der Dunkelheit. Die Hell-Dunkel-Wirkung des Lichtes macht die Formen der Gegenstände für uns sichtbar. Wir können beliebige Positionen im Raum einnehmen und, obwohl sich das Bild eines Gegenstandes jeweils mit dem Positionswechsel ändert, dieselben Formen immer wieder erkennen. Diese Tatsache verweist uns auf die projektiven Abbildungen, welche gerade die Inzidenzrelationen, d. h. die Relationen der gegenseitigen Lage, invariant lassen. Durch die in der Seele entwickelten geometrischen Vorstellungen entsteht der Gesamtzusammenhang des sichtbaren dreidimensionalen Raumes.

Ist auch bei der elementare Brechung des Lichts an der Grenzfläche zwischen zwei Medien ein Zusammenhang mit der projektiven Geometrie zu finden? In Abbildung 180 ist illustriert, wie ein Hell- bzw. Dunkelstrahlenbündel zur Oberflächennormalen hin beim Übergang von z.B. Luft in Wasser gebrochen wird.



Abbildung 180: Brechung

So wie bei einer Spiegelung, können wir auch hier die Hell- und Dunkelstrahlen als Geraden auffassen, welche im Sinne der Brechung abgebildet werden. Handelt es sich wieder um eine zentrale Kollineation? Die Grenzfläche zwischen den verschiedenen Medien stellt die Zentralebene dar, der unendlich ferne Punkt der Normalen das Zentrum der Kollineation. Wie steht es aber mit dem Doppelverhältnis? Aus Gleichung (1) folgt mit $\angle(c, d) = 90^\circ$ und mit $i = \angle(a, c)$, $r = \angle(b, c)$ die Forderung

$$DV = \frac{\tan i}{\tan r} = \text{konstant}, \quad (4)$$

welche jedoch nicht dem Snelliusschen Brechungsgesetz,

$$n = \frac{\sin i}{\sin r} = \text{konstant}, \quad (5)$$

entspricht, wobei der sogenannte Brechungsindex n , für alle Einfallswinkel gleich ist.

Die beiden Konstanten (4) und (5) unterscheiden sich um den Faktor $(\cos i / \cos r)$. Man kann daher die Frage stellen, ob es Vorstellungen und Hypothesen gibt, die die Affinität des Lichtes zu den projektiven Transformationen zum Ausdruck bringen.

Naheliegend ist folgende Hypothese: *Das Licht unterliegt seiner eigenen Natur nach bei der Brechung einer zentralen Kollineation, die zusätzlich durch den materiellen Widerstand des Wassers modifiziert wird.* Wir unterscheiden hier gedanklich zwischen dem Anlass zur zentralen Kollineation (Brechung), der durch die Grenzfläche gegeben ist, und deren Modifikation, die als Folge des Eintritts von Licht in Wasser entsteht. Für die zentrale Kollineation nehmen wir dabei als ergänzende Hypothese an, *dass der Brechungsindex n mit dem Doppelverhältnis übereinstimmt:*

$$n = DV = \frac{\tan i}{\tan r^*} = \text{konstant}, \quad (6)$$

wobei mit r^* ein hypothetischer Winkel bezeichnet wird, der in Abbildung 181 dargestellt ist.

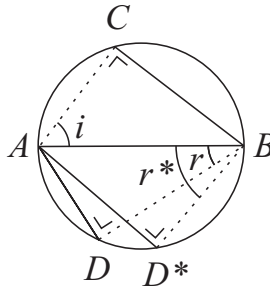


Abbildung 181: Projektive Brechung

In dieser Abbildung sieht man, wie die zentrale Kollineation die einfallende Lichtfront AC (Eintrittswinkel i) zunächst in die Lichtfront BD^* (Austrittswinkel r^*) gemäß den obigen Hypothesen bzw. gemäß Gleichung (4) transformiert und dass in einer separat zu denkenden Interaktion mit der materiellen Beschaffenheit des Wassers die Lichtfront BD^* in die Lichtfront BD (Austrittswinkel r) umgewandelt wird. Insgesamt gilt das Gesetz von Snellius.

Mit den Gleichungen(5) und (6) folgt

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\tan i}{\tan r^*} \quad (7)$$

bzw.

$$\tan r^* = \frac{\sin r}{\cos i} \quad \text{oder} \quad \frac{\cos r^*}{\cos i} = \frac{\sin r^*}{\sin r}, \quad (8)$$

und mit den Strecken aus Abbildung 181:

$$\overline{BD^*} : \overline{AC} = \overline{AD^*} : \overline{AD}. \quad (9)$$

Mit Hilfe von Gleichung (9) können wir unseren Hypothesen auch wie folgt verdeutlichen: Die Lichtfront \overline{AC} möchte sich – auf Basis der projektiven Transformation, d.h. hypothetisch – um den Faktor $\overline{BD^*}/\overline{AC}$ vergrößern. Siehe Abbildung 181. Der Natur des reinen Lichtes nach ist dies durchaus möglich; zusätzlich stößt das Licht aber auf den materiellen Widerstand des Wassers, was bewirkt, dass es seinen Weg von $\overline{AD^*}$ auf \overline{AD} verkürzt und die Lichtfront \overline{BD} an Stelle von $\overline{BD^*}$ ausbildet. Die linke Seite von Gleichung (9) entspricht also dem Anteil der rein projektiven Transformation des Lichtes; die rechte Seite von Gleichung (9) beschreibt die Verkürzung des Lichtweges durch den materiellen Widerstand des dichteren Mediums.

Vergleich der Hypothese mit Standard-Herleitungen

Unsere Hypothese geht davon aus, dass das Licht bei der Brechung erstens einer projektiven Abbildung folgt und zweitens durch den materiellen Widerstand des Wassers nochmals abgelenkt wird, so dass sich insgesamt das Snelliussche Gesetz ergibt. Wir vergleichen jetzt diese Hypothese mit den zwei herrschenden Erklärungen des Snelliusschen Gesetzes.

Das Snelliussche Gesetz wird meist auf Grundlage der Wellentheorie hergeleitet, die zum Beispiel für die Oberflächenwellen des Wassers durchaus rein phänomenologisch anwendbar ist. Bei den Oberflächenwellen sieht man unmittelbar die Schwingungen (Frequenz), die Geschwindigkeiten der Wellenphase, die Wellenlänge – nicht aber beim Licht. Bei der Anwendung des Snelliusschen Gesetzes ist man genötigt die Geschwindigkeit des Lichtes ohne weiteres als einen mechanisch-kinematischen Vorgang vorauszusetzen. Man argumentiert dann elegant und bündig wie folgt: Die Strecken \overline{CB} und \overline{AD} (Abbildung 181) sind proportional zur Lichtgeschwindigkeit. Es gilt also

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AD}} = \frac{v_1}{v_2} = n, \quad (10)$$

wobei v_1 die Lichtgeschwindigkeit in Luft und v_2 die Lichtgeschwindigkeit im Wasser bedeutet.

Eine alternative Herleitung des Snelliusschen Gesetzes, geht von der Vorstellung aus, dass das Licht dem zeitlich kürzesten Weg folgt. Diese Herleitung steht im Kontext der Quantenphysik, welche annimmt, dass das Licht sich in Form von Wellenfunktionen in alle Raumesrichtungen fortpflanzt. Aus der Interferenz aller Wellenfunktionen geht das Snelliussche Gesetz hervor. Auch die Quantenmechanik des Lichtes geht von hypothetischen Annahmen aus, insofern die Wellenfunktionen *prinzipiell unwahrnehmbar* sind. Nur der absolute Wert einer Wellenfunktion ist wahrnehmbar.

Unsere Hypothesen enthalten zwar auch unwahrnehmbare Elemente, werden aber durch verschiedene andere Erscheinungszusammenhänge unterstützt. Das reine Licht, so nehmen wir an, führt eine <projektive> Brechung aus in dem Moment, wo es die Grenzfläche berührt. Dadurch vergrößert es seinen Querschnitt von \overline{AC} auf $\overline{BD^*}$ um den Faktor $\overline{BD^*}/\overline{AC}$. Als zweites, so nehmen wir weiter an, erleidet das Licht eine Modifikation, eine Art elastische Reaktion², um die Vergrößerung des Durchschnittes zu kompensieren, und es verkürzt seinen Weg durch das Wasser um den Faktor $\overline{AD^*}/\overline{AD}$, der gemäß Gleichung (9) dem ersten Faktor gleichzusetzen ist. Das Gesetz von Snellius bleibt voll gültig. Entscheidend ist, dass diese Erklärung sich mehr auf Phänomene abstützt und keine mechanischen Schwingungen hinter den Phänomenen annimmt.

Aus anthroposophischer Sicht

Es ergibt sich ein interessanter Zusammenhang zu Aussagen Rudolf Steiners über die Entstehung der Zeit und der Raumdimensionen im Laufe der Weltevolution und die Parallelität zu bestimmten Zahlssystemen. Den Mathematikern gab Rudolf Steiner einmal den Hinweis [7, Vortrag vom 8. April 1922, S. 63], dass die Raumesdimensionen entsprechend der Erkenntnisart³ zurücktreten:

| Erkenntnisart | Raumesdimensionen |
|-----------------------|-------------------|
| materielle Erkenntnis | 3 |
| Imagination | 2 |
| Inspiration | 1 |
| Intuition | 0 |

Andererseits eröffnen diese Erkenntnisstufen den Zugang zu den Evolutionsstufen Erde, alter Mond, alte Sonne und alter Saturn [4, 5]. Während dieser Evolutionszustände wurden die Keime für die menschlichen Wesensglieder angelegt:

| Wesensglied | Evolutionstufe |
|-----------------|----------------|
| Ich | Erde |
| Astralleib | alter Mond |
| Ätherleib | alte Sonne |
| physischer Leib | alter Saturn |

Rudolf Steiner hat die vier Wesensglieder des Menschen in der Fragenbeant-

²Zitat aus [8, Fragenbeantwortung vom 7. März 1920 in Stuttgart, S. 140]: «Es wäre notwendig, beim Licht damit zu beginnen, nicht gewöhnliche mechanische Gleichungen, sondern elastische Gleichungen auszuschreiben und zugrunde zu legen. Es würde auch aus der Elastizitätslehre zu nehmen sein, was notwendig ist.»

³Für eine ausführliche Beschreibung der verschiedenen Erkenntnisarten siehe [6].

wortung in Stuttgart vom 11. März 1920 [8, S. 150 - 152] mit den verschiedenen Zahlssysteme in Beziehung gesetzt:

| Wesensglied | Zahlssystem |
|-----------------|----------------------|
| Ich | überimaginäre Zahlen |
| Astralleib | komplexe Zahlen |
| Ätherleib | negative Zahlen |
| physischer Leib | positive Zahlen |

Damit sei gerechtfertigt, in unserem Zusammenhang das folgende Schema anzuwenden:

| Evolutionstufe | Raumesdimensionen | Zahlssystem |
|----------------|-------------------|--------------|
| Erde | 3 | überimaginär |
| alter Mond | 2 | komplex |
| alte Sonne | 1 | negativ |
| alter Saturn | 0 (nur Zeit) | positiv |

Die alte Saturnentwicklung stellt den Anfang der Evolution dar, vom menschlichen Gesichtspunkt aus gesehen eine Schöpfung aus dem Nichts, was gut zu den positiven Zahlen passt, die an ihrem Anfang die Zahl Null haben. Auch der in nur *einer* Richtung – in die Zukunft – gerichtete Pfeil der Zeit passt dazu. Im Einklang damit, sind auch physikalische Begriffe wie Temperatur oder Energie, welche durch einen Nullpunkt gekennzeichnet sind. Die positiven Zahlen, welche zur Beschreibung z.B. der Bewegungsenergie oder der absoluten Temperatur benutzt werden, entsprechen der auf dem alten Saturn entstehenden Wärme. In dieser Phase der Weltentwicklung waltete eine von höchster geistiger Kraft erfüllte Willenssphäre, die auf die ganze bevorstehende Evolution ausgerichtet war. Das Entstehen der Zeit kann man mit der Wirkung dieses Willens gleichsetzen; der Wille bezieht sich ja immer auf die Zukunft. Auch das allmähliche Auftreten der Wärme ist eine Folge dieses Willens, indem durch ihn ein grosser kosmischer Enthusiasmus wirkt.

Das Licht und eine erste Raumesdimension entstehen während der alten Sonnenevolution. Als eine mögliche Fortwirkung dieser Tatsache, nimmt die eindimensionale optische Weglänge auch heute einen so zentralen Platz in der Optik ein. Vom alten Saturn kommt das Dunkle herüber in die Sonnenentwicklung. Es entsteht die Hell-Dunkel-Polarität. Zwischen diesen polaren Gegensätzen entwickelt sich *Bewegung*. Entsprechend kommt auch der Begriff der Geschwindigkeit, der das Zusammenspiel von Zeit und Raum beschreibt, zuerst auf diese Stufe der Evolution in Betracht und zwar so, dass das <Aufeinanderzugehen> das Ursprüngliche ist: Raum entsteht aus dem Zusammenspiel von Bewegung und Zeit. Der Begriff der Lichtgeschwindigkeit, der eine zo

wichtige Rolle in der heutigen Physik spielt, müsste demnach auf eine Raum-Zeit-Zusammenhänge erschaffende Qualität, ausgehend von der alten Sonne, zurückzuführen sein. Diese Frage sei hier nur angedeutet.

Der Hell-Dunkel-Polarität entspricht die Polarität der negativen und positiven Zahlen. Einerseits können wir die positiven Zahlen an sich für die Zeit beibehalten, andererseits können wir für die Hell-Dunkel-Verhältnisse das ganze Spektrum der reellen Zahlen, also positive und negative Zahlen benützen.

Wir finden die Polarität der negativen und positiven Zahlen auch in den Phänomenen der elektrisch geladenen Teilchen wieder. In der modernen Physik macht man sich jedoch keine Vorstellungen darüber, was «elektrischer Ladung», z.B. diejenige eines Elektrons «eigentlich» sei; der Begriff verweist eben nur auf «ein Etwas», dass eine Feldinteraktion verursacht. Was dieses «Etwas» wirklich ist, kann man vielleicht verstehen, wenn man negative Ladung als ein im Bereich der Unter-Natur gefangenes und erstarrtes Quantum Helligkeit und positive Ladung als ein im Bereich der Unter-Natur gefangenes Quantum Dunkelheit betrachtet⁴.

Wenn Licht in Form von Helligkeit und Dunkelheit im Gegenraum⁵ existiert, dann ist ein Punkt in unserem Raum für das Licht ein unerreichbarer Ort, etwas unendlich Fernes. Im Kontext der polar-euklidischen Geometrie kann man sich vorstellen, dass ein in die Unendlichkeit des Gegenraums «verschwindenes» Lichtquantum, sich z.B. als Elektron oder Positron manifestiert.

Ein interessantes Symptom in diesem Zusammenhang ist die Tatsache, dass die Masse der Sonne und die Masse eines Elektrons nahezu reziprok sind – ihr Produkt beträgt $1,9kg^2$. Diese Bemerkung ruft wohl mehr Fragen auf, als dass sie Antworten gibt. Entscheidend ist jedoch der Versuch, die Unter-Natur aus der Über-Natur zu erklären. Vielleicht wird es in Zukunft möglich sein, aus kosmischen Zusammenhängen heraus z.B. die Quantifizierung der elektrischen Ladung herzuleiten – ein bisher ungelöstes Rätsel in der Wissenschaft.

Wir kommen jetzt zur zweiten Raumesdimension, die auf dem alten Mond entstanden ist, als die Menschenseelen sich innerhalb einer zähen, flüssigen Umgebung entwickelten. Was die Hell-Dunkel-Polarität anbelangt, vertieft sich hier der Wechselwirkung: Es entsteht die Welt der Farben. Die Anweisungen Rudolf Steiners folgend sind nun die komplexen Zahlen anzuwenden.

Diese Zahlen haben, passend zu den zwei Raumesdimensionen, zwei Komponenten. Wir werden weiter unten zeigen, dass man tatsächlich, wenn man die Entstehung der Farben durch Lichtbrechung phänomenologisch beschreibt und sie begrifflich zu fassen versucht, auf ein zweidimensionales System kommt.

In dem Gebiet der Unter-Natur kommen komplexe Zahlen bei der Beschrei-

⁴Zitat aus [8, Fragenbeantwortung von 1. Oktober 1911 in Basel, S. 128]: «Elektrizität ist Licht in untermateriellem Zustand. Da ist das Licht in der schwersten Weise zusammengepresst.»

⁵Der Gegenraum wird durch die polar-euklidische Geometrie [3] beschrieben und besitzt die unendliche ferne Ebene unseres gewöhnlichen Raumes als seinen Ursprung.

bung eines elektromagnetischen Feldes F in Betracht. In der Literatur kann man zum Beispiel die Form $F = E + iB$ finden, wobei E die elektrische Feldstärke, B die magnetische Feldstärke und i die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ ist. Diese Beschreibung widerspiegelt den kreisenden Charakter des Magnetfeldes, wofür die imaginären Zahlen immer besonders geeignet sind.

Bevor wir nun zur Erläuterung der komplexen Zahlen übergehen eine Bemerkung zu den oben erwähnten überimaginären Zahlen⁶. In seinem Buch *Der linearen Komplex – eine überimaginäre Zahl* [1] bespricht Peter Gschwind diese Zahlen und ihre mögliche Anwendungen eingehend. Er zeigt auf, dass \langle lineare Komplexe \rangle – es handelt sich dabei um bestimmte Strahlengebilde, die von zentraler Bedeutung in der projektiven Liniengeometrie sind – als überimaginäre Zahlen aufgefasst werden können. Dadurch entsteht eine wichtige historische Perspektive in Bezug auf die Strahlenoptik, die hier erwähnt werden soll. Die Strahlenoptik baut auf dem geometrische Object \langle Gerade \rangle auf, man spricht von *Lichtstrahlen*. Ein \langle linearer Komplex \rangle stellt nun eine Verallgemeinerung des geometrischen Objektes \langle Gerade \rangle dar. Ein einzelner \langle Komplex \rangle besteht aus eine Menge von Geraden, die den ganzen Raum erfüllt; dennoch hat diese Menge eine Hauptachse, die ihre Verwandtschaft mit der einzelnen Gerade andeutet. Dass heisst, dass eine neue Optik auf der Basis der projektiven Liniengeometrie und ihre \langle lineare Komplexe \rangle entworfen werden kann, die ganz natürlich die normale Strahlenoptik als Spezialfall enthält.

Komplexe Zahlen auf einer Kugel

Normalerweise repräsentiert man die komplexen Zahlen durch die sogenannte Gaußsche Ebene, eine Ebene mit einer reellen und einer imaginären Achse. Wir wollen hier die komplexen Zahlen auf einer Kugel, der sogenannte Riemannschen Zahlenkugel, anordnen. Siehe Abbildung 182. Diese Kugel ist nicht geometrisch im Zusammenhang mit irgendwelchen Phänomenen zu verstehen, sondern nur ein Hilfsmittel im Umgang mit den komplexen Zahlen.

Jeder Punkt auf der Kugeloberfläche repräsentiert eine komplexe Zahl wobei ein unendlich ferner Punkt noch einzuschließen ist. Die Repräsentation der komplexen Zahlen auf der Riemannschen Kugel geht in die Repräsentation der komplexen Zahlen in der Gauß-Ebene durch die sogenannte stereographische Projektion über, wobei die Gauß-Ebene aus der Nordpol der Kugel auf die Kugeloberfläche projiziert wird. Will man den Einheitskreis der Gauß-Ebene auf den Äquator der Kugel projizieren, muss die Kugel den Radius $1/2$ haben – aber die Größe der Kugel ist für unsere Zwecke irrelevant.

In Abbildung 182 sieht man diesen Zusammenhang erläutert. Die Projektion ist für zwei Punkten angedeutet. Man sieht, dass der Nordpol der Kugel bei

⁶Unter dem Begriff \langle überimaginäre Zahlen \rangle werden algebraische Systeme verstanden, bei welchen die Gleichung $ab = 0$ gültig sein kann, ohne das entweder $a = 0$ oder $b = 0$ sein muss.

der Projektion keinem gewöhnlichen Punkt innerhalb der Ebene entsprechen kann. Deshalb ist man genötigt die komplexen Zahlen in der Gauß-Ebene sich so ausgebreitet zu denken, dass es *einen* unendlich fernen Punkt gibt, der bei der stereographischen Projektion in den Nordpol der Kugel überführt wird.

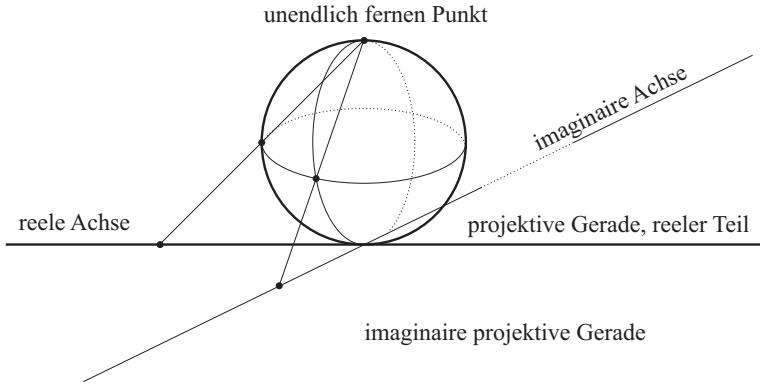


Abbildung 182: Stereographische Projektion

Da jede projektive Ebene eine unendlich ferne *Gerade als Punktreihe* enthält und nur projektive Geraden genau *einen* unendlich fernen Punkt besitzen, muss die Riemannsche Kugel oder die Gauß-Ebene einer komplexen projektiven Gerade entsprechen.

Im nächsten Abschnitt werden wir die verschiedenen Farben der Kugeloberfläche zuordnen. Entlang der reellen Achse, so wird sich herausstellen, wirkt die eindimensionale Hell-Dunkel-Polarität (Sonnenevolution). Das Resultat ist der Farbkugel OTTO RUNGES ähnlich; siehe Abbildung 183.



Abbildung 183: Lichtpol (links) und Dunkelpol (rechts) der Runge-Farbkugel

Dispersion und Farben

Bei der Brechung in Abbildung 180 haben wir die Dispersion, die Entstehung der farbigen Säumen nicht berücksichtigt. Sie sind jetzt in Abbildung 184 schematisch angegeben. Die Hell-Dunkel-Verhältnisse aus Abbildung 180 wurden beibehalten.

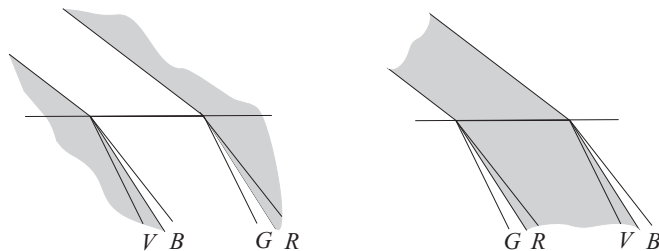


Abbildung 184: Dispersion. Die Buchstaben stehen für Gelb (G), Rot (R), Hellblau (B) und Violett (V).

Es ist nämlich so, dass die Mitte zwischen Rot und Gelb bzw. Hellblau und Violett genau mit der ursprünglichen Grenze zwischen Helligkeit und Dunkelheit übereinstimmt, was mit einem entsprechenden Versuch gezeigt werden kann. Diese Tatsache berechtigt uns, vom Eindringen der Helligkeit in das dunkle Gebiet und umgekehrt zu sprechen.

Man sieht eine doppelte Polarität bei diesem Experiment. Einerseits die Polarität der <kalten> Farben Blau und Violett gegenüber den <warmen> Farben Rot und Gelb. Andererseits innerhalb der beiden Paare eine Art Wiederholung dieser Polarität: Rot gegenüber Gelb und Blau gegenüber Violett. *Damit ist bereits der zweidimensionale Charakter der Farbentstehung angedeutet.* Man sieht auch, dass diese Dimensionen nicht als gewöhnliche räumliche Dimensionen zu verstehen sind, sondern als Dimensionen in einem Farbenraum.

Betrachten wir zuerst das Rot und das Violett. Diese Farben entstehen in einem Gebiet das ursprünglich dunkel ist. Dieses dunkle Gebiet bezeichnen wir schematisch mit der Zahl -1 . Etwas Helligkeit (schematisch mit der Zahl 1 verzeichnet) dringt jetzt in dieses Gebiet ein, die Hell-Dunkel-Grenze überschreitend, aber jeweils auf eine andere Art. Der genaue und differenzierte Verlauf des Eindringens geht aus dem Phänomen nicht unmittelbar hervor, man kann nur sagen, dass in beiden Fällen (Rot und Violett) die Helligkeit in das dunkle Gebiet eindringt, aber jeweils in einer entgegengesetzten Richtung in Bezug auf die Deviation. Die Auswirkung dieses <Eindringens> ist die Entstehung der Farbe. Diese Wirkungen wollen wir im Farbenraum denken und den Unterschied schematisch entlang einer zweiten Dimension dieses Farbenraums als $-1 + i$ (Rot) respektive $-1 - i$ (Violett) beschreiben. Siehe Abbildung 185.

Entsprechend gilt für Gelb und Hellblau: Sie entstehen in einem Gebiet

das eigentlich hell ist. Etwas Dunkelheit dringt in dieses Gebiet ein, jeweils in entgegengesetzter Richtung. Die schematische Bezeichnung entlang der zweiten Dimension des Farbenraumes wird $1 + i$ für Gelb und $1 - i$ für Hellblau. Siehe Abbildung 185.

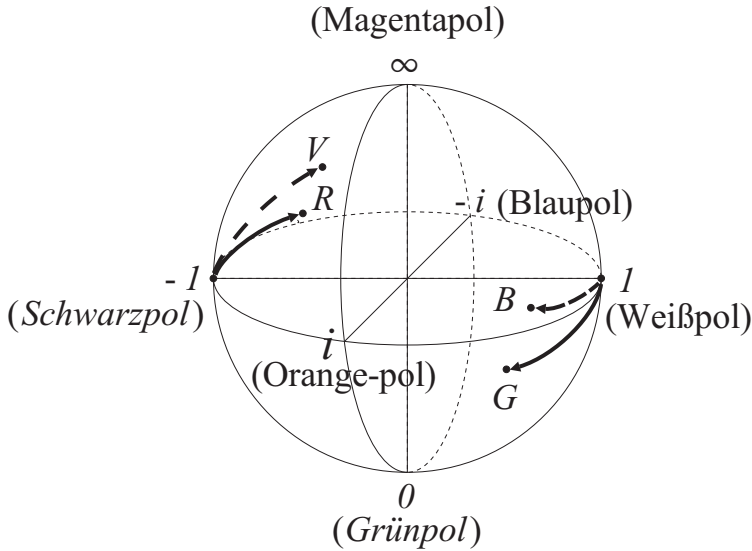


Abbildung 185: Farbenkugel

Die Abbildung 185 soll folgendermaßen verstanden werden: Auf der Vorderseite sieht man die <warmen> Farben Rot, Orange, Gelb; auf der Hinterseite die <kalten> Farben Hellblau, Dunkelblau, Violet; nach links werden alle Farben dunkler, nach rechts heller; nach unten findet man die mehr <irdischen> Farben, z.B. Grün, nach oben die mehr <ätherischen> Farben, z.B. Magenta. *Man unterscheidet also drei Polaritäten im Farbenraum.*⁷

Die Entstehung der Farben aus Weiß oder Schwarz entspricht einer Drehung der Kugel. Soll Violet aus Schwarz entstehen, muss die Kugel so drehen wie es der Pfeil in Abbildung 185 andeutet. Dieselbe Drehung lässt auch Gelb aus Weiß entstehen. Eine andere Drehung lässt Rot aus Schwarz entstehen und zugleich Hellblau aus Weiß.

Hellblau und Gelb bewegen sich auf der Kugel ausgehend vom Weißpol in Richtung Grünpol, wo sie sich, wenn die Drehung fortgeführt wird, begegnen.

⁷Die drei Polaritäten entsprechen fortdauernden Wirkungen des alten Saturn, der alten Sonne und des alten Mondes.

Ebenso bewegen sich Rot und Violet ausgehend vom Schwarzpol in Richtung Magentapol, wo sie sich bei fortgesetzter Drehung begegnen. In beiden Fällen entsteht eine geschlossene Kurve auf der Kugeloberfläche. Es kann auch eine Trajektorie auf der Kugel in Abhängigkeit der Zeit entstehen, wenn man z.B. die aufeinanderfolgenden Farben beim Sonnenuntergang aufzeichnet.

Wir wiederholen nochmals, dass der Farbenkugel von uns in Betracht gezogen wurde, weil sie ein zweidimensionales System und insbesondere eine komplexe projektive Gerade darstellt. Die geometrische Form der Kugel ist für uns nicht wesentlich, sie ist Hilfsmittel im Umgang mit einer komplexen projektiven Gerade. Weitere Berechtigungen für diese Vorgehensweise stehen noch aus. *Eine Frage wäre zum Beispiel, ob projektive Inzidenzrelationen, oder harmonische Würfe irgendwie im Zusammenhang mit Farbexperimenten auftreten.*

Zum Schluss noch eine Bemerkung über die Trübe. Wie von Johannes Kühl aufgezeigt [2] und auch von Rudolf Steiner betont [9, Vortrag vom 24. Dezember 1919] ist die Dispersion bei der Brechung durch die Absorption des Lichts bedingt, in diesem Fall durch das Wasser. Die Absorption spielt die Rolle der Trübe. Es wäre irreführend sich vorzustellen, dass das Helligkeit vor bzw. hinter die Dunkelheit gerät, weil dabei eine räumliche Dimension eingeführt wird, die im Phänomen nicht zutage tritt. Vielmehr wollen wir diese Wirkungen im Farbenraum, d.h. auf der Farbenkugel denken. Auch in der Physik wird auf diesen Zusammenhang hingewiesen, mittels den sogenannten Kramers-Krönig-Relationen. Diese Relationen bringen die Dispersion für eine bestimmte Frequenz in einen mathematischen Zusammenhang mit der Absorption aller Frequenzen zusammen. Interessanterweise beruhen auch diese mathematischen Beziehungen auf komplexen Zahlen.

Mein herzlicher Dank geht an Oliver Conradt für die Redaktion des Aufsatzes.

Literaturverzeichnis

- [1] GSCHWIND, PETER: *Der lineare Komplex – eine überimaginäre Zahl*. Verlag am Goetheanum, Dornach, 2. umgearbeitete und erweiterte Auflage, 1991.
- [2] KÜHL, JOHANNES: *Zum Goethe'schen Urphänomen der Farbentstehung und zu einem Zusammenhang mit Beugung und Brechung*. Elemente der Naturwissenschaft, 49, S. 85–95, 1988.
- [3] LOCHER-ERNST, LOUIS: *Projektive Geometrie*. Verlag am Goetheanum, Dornach, 1980.
- [4] STEINER, RUDOLF: *Die Schwelle der geistigen Welt*. Rudolf Steiner Verlag, Dornach, 7. Auflage, 1987. GA 17.
- [5] STEINER, RUDOLF: *Die Geheimwissenschaft im Umriss*. Rudolf Steiner Verlag, Dornach, 30. Auflage, 1989. GA 13.

- [6] STEINER, RUDOLF: *Die Stufen der höheren Erkenntnis*. Rudolf Steiner Verlag, Dornach, 7. Auflage, 1993. GA 12.
- [7] STEINER, RUDOLF: *Damit der Mensch ganz Mensch werde. Die Bedeutung der Anthroposophie im Geistesleben der Gegenwart*. Rudolf Steiner Verlag, Dornach, 1994. GA 82.
- [8] STEINER, RUDOLF: *Die vierte Dimension. Mathematik und Wirklichkeit*. Rudolf Steiner Verlag, Dornach, 1. Auflage, 1995. GA 324a.
- [9] STEINER, RUDOLF: *Geisteswissenschaftliche Impulse zur Entwicklung der Physik*. Rudolf Steiner Verlag, Dornach, 4. Auflage, 2000. GA 320.

Gerard Hermans

F. Boerwinkelhof 5

NL 3972 SX Driebergen

Holland

E-Mail: hermans.gerard@gmail.com

Erhalten: November 2009