Wojewódzki Konkurs Matematyczny

dla uczniów gimnazjów. Etap Szkolny

Rozwiązania i punktacja

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. (*1 punkt*) Symbol $n!$ oznacza iloczyn liczb naturalnych od 1 do n tzn. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ (np. $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$).
Która z poniższych liczb nie jest liczbą całkowitą ?

A $\frac{20!}{26}$ **B** $\frac{20!}{27}$ **C** $\frac{20!}{28}$ **D** $\boxed{\frac{20!}{29}}$ **E** $\frac{20!}{30}$

Zadanie 2. (*1 punkt*) Ile wynosi kąt między przekątnymi pięciokąta foremnego wychodzącymi z tego samego wierzchołka ?

A 30^o **B** $\boxed{36^o}$ **C** 45^o **D** 60^o **E** 72^o

Zadanie 3. (*1 punkt*) Ceny towarów A i B są jednakowe. Cenę towaru A podniesiono o 20% natomiast cenę towaru B obniżono o 10%. O ile procent cena towaru B jest niższa od ceny towaru A?

A $\boxed{25\%}$ **B** 30% **C** 33,33% **D** 40% **E** 50%

Zadanie 4. (*1 punkt*) Długość boku pewnego kwadratu została zmniejszona o 1 cm. Wówczas jego pole zmniejszyło się o 39 cm^2. Pole mniejszego z kwadratów wynosi:

A $\boxed{361\ \mathrm{cm}^2}$ **B** 225 cm^2 **C** 441 cm^2 **D** 121 cm^2 **E** 444 cm^2

Zadanie 5. (*1 punkt*) Prostokąt nie będący kwadratem wpisano w koło. Następnie połączono środki boków tego prostokąta i w otrzymany w ten sposób czworokąt wpisano koło.
Tak utworzona figura ma :

A $\boxed{\text{środek symetrii i dwie osie symetrii}}$

B środek symetrii i nie ma osi symetrii

C cztery osie symetrii

D dwie osie symetrii i i nie ma środka symetrii

E dokładnie jedną oś symetrii i i nie ma środka symetrii

Zadanie 6. (*1 punkt*) Julka zaczęła wrzucać do pustej skarbonki co tydzień 1 zł 50 gr. Po ilu co najmniej tygodniach uzbiera więcej pieniędzy od Małgosi, jeżeli Małgosia ma w skarbonce 15 zł i co tydzień wrzuca do niej 70 gr?

A 16 **B** 17 **C** 18 **D** $\boxed{19}$ **E** 20

Zadanie 7. (*1 punkt*) Długość boku i jednej z przekątnych rombu są równe 10. Ile wynosi długość drugiej przekątnej rombu?

A 15 **B** 10 **C** $5\sqrt{3}$ **D** $10\sqrt{2}$ **E** $\boxed{10\sqrt{3}}$

Zadanie 8. (*1 punkt*) Średnia z dziewięciu ocen Marka z matematyki wynosi 4,5. Jaką ocenę otrzymał Marek z ostatniej klasówki jeżeli jego średnia ocen zmniejszyła się o 0,15 ?

A 1 **B** 2 **C** $\boxed{3}$ **D** 4 **E** 5

Zadanie 9. (*1 punkt*) Kod dostępu do komputera Bartka złożony jest z trzech kolejnych wykładników potęg liczby 4 ułożonych w kolejności od najmniejszej do największej. Suma tych potęg wynosi 5376. Kod dostępu jest równy:

A 234 **B** 345 **C** $\boxed{456}$ **D** 567 **E** 678

Zadanie 10. (*1 punkt*) Pierwszy kran napełnia zbiornik w ciągu dwóch godzin. Dwa krany napełniają zbiornik w ciągu 72 min. Jak długo napełnia zbiornik drugi kran?

A $\boxed{\text{3 godz.}}$ **B** 90 min. **C** 2 godz. **D** 150 min. **E** 4 godz.

ZADANIA OTWARTE

Zadanie 11. (*4 punkty*) Zmieszano dwa gatunki cukierków w różnych cenach w stosunku 2:3 i uzyskano mieszankę w cenie 13,80 zł za 1 kg. Gdyby te cukierki zmieszano w stosunku 1:3, wówczas cena 1 kg mieszanki wynosiłaby 14,25 zł. Oblicz cenę 1 kg każdego gatunku cukierków.

Rozwiązanie

Oznaczenia:
x=cena 1 kg cukierków I gatunku
y=cena 1 kg cukierków II gatunku

W mieszance w stosunku 2:3 koszt cukierków I gatunku wynosi $\frac{2}{5}x$ natomiast koszt cukierków II gatunku wynosi $\frac{3}{5}y$. Koszt 1 kg mieszaniki wynosi $\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y$. Analogicznie koszt 1 kg drugiej mieszanki wynosi:$\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y$. Otrzymujemy układ równań:

$$\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y = 13,80 \text{ zł}$$

$$\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y = 14,25 \text{ zł}$$

Rozwiązaniem tego układu są liczby x= 12 zł, y=15 zł.

Odpowiedź

Cena 1 kg cukierków I gatunku wynosi 12 zł, cena 1 kg cukierków II gatunku wynosi 15 zł.

Punktacja

Ułożenie poprawnych równań - 3 punkty,
Podanie poprawnych odpowiedzi - 1 punkt.

Zadanie 12. (*4 punkty*) W skład pociągu wchodzą wagony pierwszej i drugiej klasy. W wagonie drugiej klasy znajduje się 12 przedziałów po 8 miejsc, w wagonie pierwszej klasy znajduje się 10 przedziałów po 6 miejsc. W pociągu znajduje się 624 pasażerów przy czym w wagonach drugiej klasy zostało 20 miejsc wolnych, natomiast w wagonach pierwszej klasy zostało 16 miejsc wolnych. Z ilu wagonów pierwszej klasy oraz z ilu drugiej klasy składał się pociąg ?

Rozwiązanie

Oznaczenia:
x=Liczba wagonów I klasy w pociągu
y=Liczba wagonów II klasy w pociągu

Liczba miejsc w wagonie II klasy wynosi $12 \cdot 8 = 96$. Liczba miejsc w wagonie I klasy wynosi $10 \cdot 6 = 60$. W pociągu było $624 + 20 + 16 = 660$ miejsc. (suma miejsc zajętych i wolnych). Otrzymujemy następujące równanie, którego rozwiązaniem mogą być tylko liczby całkowite.

$$60x + 96y = 660$$

Po podzieleniu przez 60 równanie można zapisać w postaci :

$$x + \frac{8}{5}y = 11$$

.
Z powyższego równania widać, że $x \leqslant 11$ oraz $y \leqslant 6$. Ponadto $x > 0$ i $y > 0$, gdyż z informacji o tym, że w wagonach były wolne miejsca wynika, że wagony I i II klasy wchodziły w skład pociągu. Równanie będzie miało rozwiązanie w liczbach całkowitych tylko wtedy gdy y będzie podzielne przez 5. Jedyną liczbą y spełniającą powyższe warunki jest $y = 5$. Wówczas $x = 3$

Odpowiedź

W pociągu było 5 wagonów II klasy i 3 wagony I klasy.

Punktacja

Ułożenie poprawnego równania - 2 punkty,
Stwierdzenie, że rozwiązania są liczbami całkowitymi - 1 punkt Wyznaczenie poprawnego rozwiązania - 1 punkt

Zadanie 13. (*4 punkty*) Dwóch turystów wyruszyło na trasę wycieczkową składającą się z czterech etapów. Długości poszczególnych etapów oraz prędkość każdego turysty na każdym etapie przedstawia ponizsza tabelka.

	I etap	II etap	III etap	IV etap
dystans	3 km	4 km	2 km	3 km
prędkość turysty 1	5 $\frac{km}{h}$	4 $\frac{km}{h}$	5 $\frac{km}{h}$	3 $\frac{km}{h}$
prędkość turysty 2	3 $\frac{km}{h}$	6 $\frac{km}{h}$	4 $\frac{km}{h}$	6 $\frac{km}{h}$

Który z turystów pierwszy ukończy trasę wycieczkową? Oblicz średnią prędkość na całej trasie dla każdego turysty.

Rozwiązanie

Dla każdego turysty obliczamy czas przejścia w kolejnych etapach dzieląc drogę przez prędkość. Obliczenia zawarte są w poniższej tabelce.

	I etap	II etap	III etap	IV etap
czas turysty 1	$\dfrac{3\ km}{5\ \frac{km}{h}} = \dfrac{3}{5}h$	$\dfrac{4\ km}{4\ \frac{km}{h}} = 1\ h$	$\dfrac{2\ km}{5\ \frac{km}{h}} = \dfrac{2}{5}h$	$\dfrac{3\ km}{3\ \frac{km}{h}} = 1h$
czas turysty 2	$\dfrac{3\ km}{3\ \frac{km}{h}} = 1\ h$	$\dfrac{4\ km}{6\ \frac{km}{h}} = \dfrac{2}{3}h$	$\dfrac{2\ km}{4\ \frac{km}{h}} = \dfrac{1}{2}h$	$\dfrac{3\ km}{6\ \frac{km}{h}} = \dfrac{1}{2}h$

Sumując czasy przejścia wszystkich etapów dla obu turystów otrzymujemy:

dla turysty 1

$$\frac{3}{5}h + 1\ h + \frac{2}{5}h + 1\ h = 3\ h$$

dla turysty 2

$$1\ h + \frac{2}{3}h + \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}h = \frac{8}{3}h$$

Obliczanie średniej prędkości na całej trasie dla obu turystów.
Długość trasy wynosi:

$$3\ km + 4\ km + 2\ km + 3\ km = 12\ km$$

Prędkość turysty 1

$$v_1 = \frac{s}{t} = \frac{12\ km}{3\ h} = 4\ \frac{km}{h}$$

Prędkość turysty 2

$$v_2 = \frac{s}{t} = \frac{12\ km}{\frac{8}{3}h} = \frac{36}{8}\ \frac{km}{h} = 4,5\ \frac{km}{h}$$

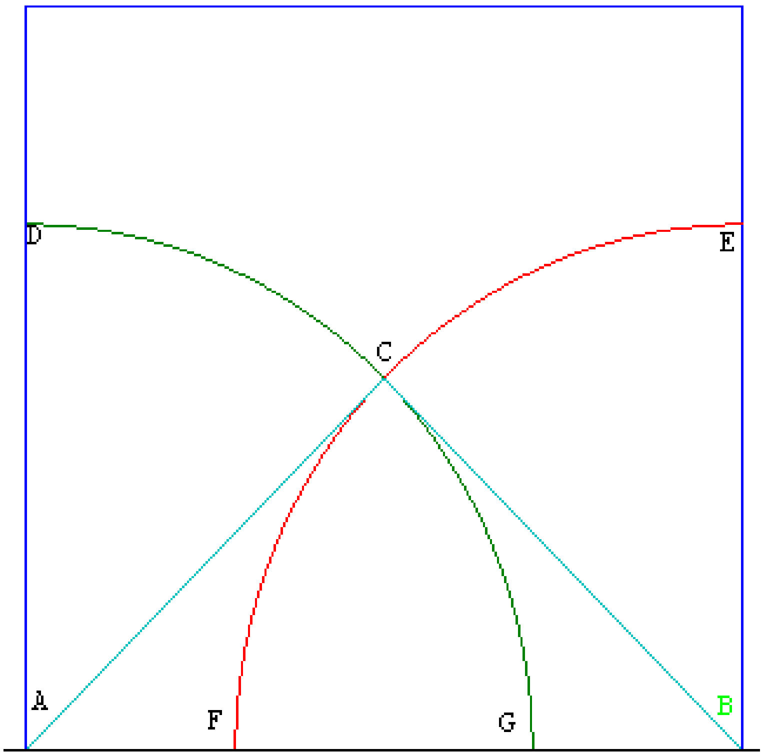
Odpowiedź

Pierwszy ukończył trasę turysta 2.
Prędkość turysty 1 $v_1 = 4\ \frac{km}{h}$, prędkość turysty 2 $v_2 = 4,5\ \frac{km}{h}$

Punktacja

Wyznaczenie czasu dla każdego odcinka dla obu turystów - 2 punkty,
Odpowiedź na pytanie „kto pierwszy ukończył trasę” - 1 punkt
Wyznaczenie średniej prędkości dla obu turystów - 1 punkt.

Zadanie 14. (*4 punkty*) Ogrodzona łąka ma kształt kwadratu o boku $40\sqrt{2}$ m. Na łące pasie się koza przywiązana do kołka łańcuchem o długości 40 m, znajdującego się w rogu łąki (wierzchołek kwadratu). Po 40 dniach okazało się, że koza zjadła całą trawę którą miała w zasięgu. Gospodarz zdecydował się na przywiązanie kozy w sąsiednim rogu łąki. Po zjedzeniu dostępnej trawy gospodarz odwiązał kozę z łańcucha by mogła się paść na pozostałej części łąki. Na ile całych dni wystarczy kozie pozostała trawa?
Wykonaj rysunek w skali 1:400. Przyjmij, że bok pojedynczej kratki ma długość 5 mm.



Rozwiązanie

Załóżmy że koza jest najpierw przyczepiona w rogu oznaczonym na rysunku jako A. Wówczas koza ma w zasięgu wycinek koła ADG o promieniu 40m i kącie prostym . Pole tego wycinka wynosi

$$P_{ADG} = \frac{1}{4}\pi \cdot 40^2 = 400\pi \text{ m}^2$$

Trawa na wycinku koła ADG wystrczyło kozie na 40 dni więc koza zjada dziennie

$$\frac{400\pi}{40} = 10\pi = 31,4 \text{ m}^2$$

Po zmianie miejsca przywiązania koza ma w zasięgu wycinek koła BFE, z tym że we fragmencie tego wycinka FCG trawa została zjedzona. Przed odwiązaniem kozy od punktu B, koza zjadła trawę z figury ograniczonej liniami między punktami ABDCE. W celu obliczenia pola tej figury należy zauważyć że trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym i równoramiennym ($|AC| = |BC| = 40$, oraz $|AB| = 40\sqrt{2}$). Pole figury ABDCE składa się z trójkąta ABC i dwóch wycinków koła ADC i BCE o promieniu 40 m i kącie 45^o. Stąd

$$P_{ABDCE} = \frac{1}{2}40 \cdot 40 + 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \pi \cdot 40^2 = 800 + 400\pi = 2056 \text{ m}^2$$

Całkowite pole łąki jest równe

$$P = (40\sqrt{2})^2 = 3200 \text{ m}^2$$

Pole łąki na której dostępna jest trawa po odwiązaniu kozy wynosi:

$$P = 3200 - 2056 = 1144 \text{ m}^2$$

Po podzieleniu pola powierzchni łąki z niezjedzoną trawą przez powierzchnię trawy jedzonej dziennie otrzymujemy

$$\frac{1144}{31,4} = 36,43$$

Odpowiedź

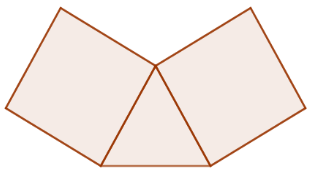
Kozie wystarczy trawy na 36 całych dni.

Punktacja

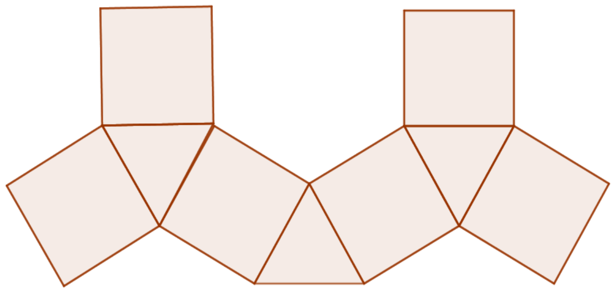
poprawny rysunek - 1 punkt
wyznaczenie pola z dostępną trawą po odwiązaniu kozy - 2 punkty
obliczenie całkowitej liczby dni 1 punkt.

nazwisko i imiona ucznia	

Zadanie 15. (*4 punkty*) Przeprowadzono następującą konstrukcję geometryczną składająca się z trójkątów równobocznych o boku 4 cm i kwadratów, zbudowanych na bokach tych trójkątów równobocznych. Jest to przykład fraktala, czyli zbioru samo-podobnego, powtarzalnego, którego części są podobne do całości. Poniżej rysunek przedstawia schemat konstrukcji. W pierwszym kroku na dwóch bokach trójkąta równobocznego budujemy kwadraty o boku równym długości boku trójkąta równobocznego. W kolejnych krokach powtarzamy tę konstrukcję, na boku każdego z otrzymanych kwadratów, który nie ma punktów wspólnych z trójkątem. Ile wynosi suma pól wszystkich kwadratów i trójkątów, tworzących figurę powstałą w 3-cim kroku? Uzasadnij swoją odpowiedź.



krok 1



krok 2

Rozwiązanie

Figura utworzona w 1 kroku składa się z trójkąta równobocznego o boku równym 4 cm i dwóch kwadratów o boku 4cm. Pole tej figury jest równe:

$$P_{krok1} = \frac{\sqrt{3}\cdot 4^2}{4} + 2\cdot 4^2 = (4\sqrt{3}+32)\ \mathrm{cm}^2$$

W kroku 2 do każdego z nowopowstałych kwadratów dodajemy taką samą figurę jak w kroku pierwszym, a więc mamy dodane dwa trójkąty i cztery kwadraty. Figura w kroku drugim składa się zatem z 3 trójkątów (1 z kroku 1 i 2 zkroku 2) i 6 kwadratów (2 z kroku 1 i 4 z kroku 2). W kroku 3 do każdego z nowopowstałych kwadratów dodajemy taką samą figurę jak w kroku pierwszym. W kroku 2 powstały 4 kwadraty, więc w kroku 3 dodajemy 4 trójkąty i 8 kwadratów. Figura która powstała w kroku 3 składa się z 7 trójkątów (1 z kroku 1, 2 zkroku 2 i 4 z kroku 3) oraz 14 kwadratów (2 z kroku 1, 4 z kroku 2 i 8 z kroku 3) Pole figury z kroku 3:

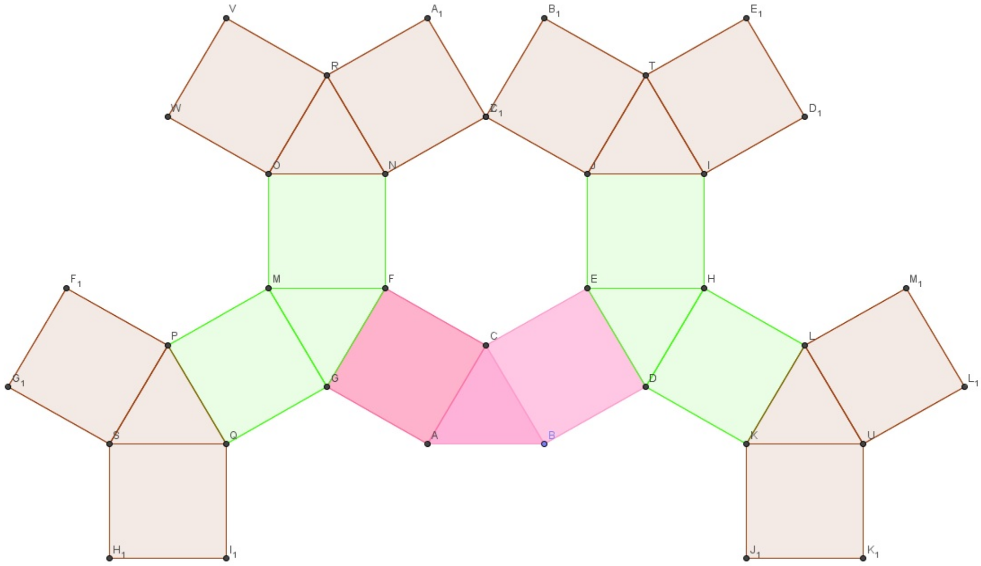
$$P_{krok3} = 7\cdot\frac{\sqrt{3}\cdot 4^2}{4} + 14\cdot 4^2 = 28\sqrt{3}+224 = 272,5\ \mathrm{cm}^2$$

Odpowiedź

Pole figury otrzymanej w kroku 3 wynosi $272,5\ \mathrm{cm}^2$.

Punktacja

Określenie z ilu trójkątów i kwadratów składa się figura uzyskana w kroku 3 - 2 punkty. Obliczenia pola figury z kroku 3 - 2 punkty.



rysunek poglądowy dla kroku 3
(*Nie należy do rozwiązania zadania.*)